Wachstumsverhalten von Lösungen der $\overline{\partial}$-Gleichung auf Pseudo-Siegelgebieten

Diplomarbeit
im Fach Mathematik

an der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Kerstin Hesse

Bonn, Juli 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

In der vorliegenden Arbeit werden mit der Methode der Integraldarstellungen explizite Lösungen der inhomogenen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (der sog. $\overline{\partial}$-Gleichung)

$$\overline{\partial}u = f \quad \text{für } f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap \ker(\overline{\partial}),\ 1 \leq q \leq n$$

auf speziellen unbeschränkten, glatt berandeten, pseudokonvexen Gebieten $S^{(m)}$ im $\mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ konstruiert und abgeschätzt, wobei gewisse Wachstumsbedingungen an die Formen f gestellt werden. Die Lösungen genügen einer analogen Wachstumsbedingung. Zunächst soll die Problemstellung genauer erklärt werden:

Die betrachteten Gebiete $S^{(m)} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, hängen von einem n-Tupel von Parametern $m := (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{n-1}$ ab und sind folgendermaßen definiert:

$$S^{(m)} := \left\{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : \varrho^{(m)}(\zeta) := \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} + \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n}) - 1 < 0 \right\}$$

Sie werden als *Pseudo-Siegelgebiete* bezeichnet, weil der Sonderfall $S := S^{(1,\ldots,1)}$ das aus der Literatur bekannte klassische Siegelgebiet ist, welches zur Einheitskugel biholomorph ist. Die Pseudo-Siegelgebiete sind unbeschränkt, glatt berandet und pseudokonvex. Das $\overline{\partial}$-Problem kann also für geschlossene $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(S^{(m)})$ gelöst werden.

Es werden Formen $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit dem folgenden *Wachstumsverhalten* betrachtet:[1] Es gibt eine von f abhängige Konstante $C_f > 0$ und einen reellen negativen Parameter k, so daß gilt:

$$\text{Für } \zeta \in \overline{S^{(m)}} \text{ und } \|\zeta\| \to \infty \text{ gilt} \quad |f(\zeta)| \leq C_f \, \|\zeta\|^k = C_f \, \|\zeta\|^{-|k|}. \tag{1}$$

Für $k < k_0(m,q) \leq 0$ werden explizite Lösungen $u \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ mit den folgenden zwei Eigenschaften konstruiert:[2]

[1]**Definition:** f ist in $\mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind: (i) f ist auf $\overline{S^{(m)}}$ definiert. (ii) $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(S^{(m)})$. (iii) Ist $p \in bS^{(m)}$ und sind $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ lokale reelle $\mathcal{C}^{\infty}$-Koordinaten in einer Umgebung $U(p)$ von p mit $U(p) \cap S^{(m)} = \{\zeta \in U(p) : x_{2n}(\zeta) < 0\}$, dann gilt: $f(\zeta(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}))$ ist $\mathcal{C}^{\infty}$ in $x_1, \ldots, x_{2n}$ auf $\{x_{2n} \leq 0\}$.

[2]$k_0(m,q) \leq 0$ ist eine Konstante, die von $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ und vom Grad q der betrachteten Formen abhängt. Sie wird zusammen mit den genauen Ergebnissen angegeben.

(i) Für jeden Radius $R > 0$ gibt es eine von f und R abhängige Konstante $\widetilde{C}_{f,R} > 0$, so daß gilt:

$$\sup_{\zeta \in \overline{B(0,R)} \cap S^{(m)}} |u(\zeta)| \leq \widetilde{C}_{f,R} < \infty$$

(ii) Es gibt eine reelle Zahl $l(k, m, q)$, so daß für jedes $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ (mit dem oben verlangten Wachstumsverhalten) die Lösung u die folgende Bedingung mit einer von f abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_f > 0$ erfüllt:

$$\text{Für } \zeta \in S^{(m)} \text{ und } \|\zeta\| \to \infty \text{ gilt} \quad |u(\zeta)| \leq \widetilde{C}_f \, \|\zeta\|^{l(k,m,q)}.$$

Der Koeffizient $l(k, m, q)$ hängt dabei nur von dem Parameter k aus der Wachstumsbedingung (1), dem Parameter-Tupel $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ des Gebietes und dem Grad q der Formen f ab und nimmt auch nichtnegative Werte an.

Die $\overline{\partial}$-Gleichung wird nicht direkt auf dem Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ gelöst, sondern auf dem dazu biholomorphen *komplexen Pseudoellipsoid* $D^{(m)}$.

$$D^{(m)} := \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : r^{(m)}(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} - 1 < 0 \right\}$$

Der hier benutzte *Biholomorphismus* $b_{(m)} : \overline{S^{(m)}} \to \overline{D^{(m)}} \setminus \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$, wobei die Menge $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ eine endliche Teilmenge von $bD^{(m)}$ ist, hängt von dem Parameter-Tupel $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ der Gebiete $S^{(m)}$ bzw. $D^{(m)}$ ab. Da sich die Parameter $m_1, \ldots, m_n$ der Abbildung $b_{(m)}$ immer aus dem Kontext ergeben wird $b_{(m)}$ im folgenden nur noch mit b bezeichnet. Es gilt

$$\lim_{\zeta \in \overline{S^{(m)}},\, \|\zeta\| \to \infty} b(\zeta) \in \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}}).$$

Die Inverse zu $b = b_{(m)}$ wird mit $B = B_{(m)} := (b_{(m)})^{-1}$ bezeichnet. Die Funktion $\delta(z) := \operatorname{dist}(z, \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ sei der euklidische Abstand zu der Menge $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$. Die auf $D^{(m)}$ zurückgezogenen Formen $F := B^* f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})) \cap ker(\overline{\partial})$ erfüllen dann die Abschätzung $|F(z)| \leq C_f \, \widetilde{C}_k \, \delta(z)^{-\gamma(k,m,q)}$ mit einer von f abhängigen Konstanten $C_f > 0$, einer nur von k abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_k > 0$ und einem reellen Parameter $\gamma(k, m, q) \geq 0$. Für $k < k_0(m, q)$ gilt $\gamma(k, m, q) < 2n$, insbesondere sind die Formen F also für $k < k_0(m, q)$ integrabel.

Daher wird auf dem komplexen Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ ein *Integral-Lösungsoperator* $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ konstruiert, der für integrable Formen F, die einer Abschätzung der Form $|F(z)| \leq C_F \, \delta(z)^{-\gamma}$ mit $0 \leq \gamma < 2n$ genügen, gegen $\delta(z)$ abgeschätzt werden kann. Der Operator $T_q := b^* \widehat{T}_q B^*$ löst dann für $f \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit der Wachstumsbedingung (1) für $k < k_0(m, q)$ die Gleichung $\overline{\partial} u = f$, und die Lösung u hat das gewünschte Wachstumsverhalten.

Die Lösungstheorie der $\overline{\partial}$-Gleichung mit der Methode der Integraldarstellungen wurde seit Anfang der siebziger Jahre von verschiedenen Autoren systematisch entwickelt. Zunächst wurden auf streng pseudokonvexen beschränkten Gebieten Integral-Lösungsoperatoren konstruiert, für die sowohl Hölder- als auch $\mathcal{L}^p$-Abschätzungen angegeben werden konnten. Seit Mitte der siebziger Jahre wurde die Konstruktion von Integral-Lösungsoperatoren mit Abschätzungen auch auf nur pseudokonvexen, aber nicht streng pseudokonvexen Gebieten untersucht. Solche werden im folgenden auch als *schwach pseudokonvexe Gebiete* bezeichnet. Bis jetzt konnten aber für schwach pseudokonvexe Gebiete noch keine so allgemeinen Aussagen über die Lösbarkeit der $\overline{\partial}$-Gleichung mit Abschätzungen (wie im streng pseudokonvexen Fall) bewiesen werden. Tatsächlich ist es so, daß viele Methoden bei der Konstruktion und Abschätzung von Integral-Lösungsoperatoren nicht vom streng pseudokonvexen auf den schwach pseudokonvexen Fall übertragen werden können. Bei den in der Literatur bewiesenen Resultaten für schwach pseudokonvexe Gebiete wurden in der Regel zusätzliche Anforderungen an den Rand der betrachteten Gebiete gestellt. In diesen Kontext gehört das in dieser Arbeit behandelte Problem.

Das *klassische Siegelgebiet* S taucht zuerst 1969 bei Pyatetskii-Shapiro in [Py] als Beispiel eines Siegelgebietes zweiter Art auf. Auch die Biholomorphie zur Einheitskugel wird dort erwähnt.[3]

Die *Pseudo-Siegelgebiete* als Verallgemeinerung des klassischen Siegelgebietes wurden von Barletta und Parrini 1995 in der Veröffentlichung [BaPa] eingeführt, welche als Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit gedient hat. Da die Pseudo-Siegelgebiete für $m \neq (1, \ldots, 1)$ nur schwach pseudokonvex und außerdem noch unbeschränkt sind, liegen auf den Pseudo-Siegelgebieten zunächst keine Informationen über das Verhalten von speziellen Lösungen der Gleichung $\overline{\partial}u = f$ (d. h. insbesondere Abschätzungen) vor. Barletta und Parrini untersuchen in [BaPa] die Existenz beschränkter Lösungen $u \in \mathcal{C}^\infty(S^{(m)})$ der Gleichung $\overline{\partial}u = f$ für geschlossene Formen $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,1)}(\overline{S^{(m)}})$, welche die Wachstumsbedingung (1) erfüllen. Dazu wird das zu $S^{(m)}$ biholomorphe komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ als analytische Überlagerung der Einheitskugel aufgefaßt, und mit Ideen von Dautov und Henkin (vgl. [DaHe]) wird auf $D^{(m)}$ ein Integral-Lösungsoperator konstruiert. Bei den Abschätzungen des Integralkerns ist Barletta und Parrini ein Fehler unterlaufen, daher sind ihre Ergebnisse für $n \geq 3$ unbewiesen. Nach der Korrektur des Fehlers ergeben sich für beliebiges n und beliebige Parameter $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ mit einer analogen Vorgehensweise

[3]Das Gebiet, welches hier als klassisches Siegelgebiet bezeichnet wird, ist nicht mit der verallgemeinerten oberen Halbebene zu verwechseln, die bereits in Siegels dreibändigen Werk „Topics in Complex Function Theory“ (1969 - 1973 bei John Wiley and Sons Inc. erschienen) eingeführt wird.

wie in [DaHe] keine geeigneten Abschätzungen der Lösungen mehr.

Die *komplexen Pseudoellipsoide* $D^{(m)}$ sind konvex und ein besonders einfacher Fall schwach pseudokonvexer Gebiete, für den relativ leicht Integral-Lösungsoperatoren mit Abschätzungen konstruiert werden können.

Für die Klasse der komplexen Pseudoellipsoide wurde von Range (vgl. [Ra1]) für $1 \leq q \leq n$ ein Operator $T_q : \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \to \mathcal{C}^1_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ konstruiert, der die $\overline{\partial}$-Gleichung löst und Hölder-Abschätzungen der Lösung der Stufe α für alle $\alpha < 1/(2M)$ mit $M := \max\{m_1, \ldots, m_n\}$ erfüllt. In der Diplomarbeit [We] von Wette wird mit Methoden aus [LiRa] durch eine Modifikation des Operators T_q ein Operator $T^*_q : \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \to \mathcal{C}^0_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ konstruiert, der für geschlossene $F \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap \mathcal{C}^l_{(0,q)}(D^{(m)})$ für $l \geq 1$ die $\overline{\partial}$-Gleichung löst und für $l \in \mathbb{N}_0$ Hölder-Abschätzungen der Stufe $l+\alpha$ für $\alpha < 1/(2M)$ erfüllt. Chen, Krantz und Ma haben einen Lösungsoperator der $\overline{\partial}$-Gleichung für $F \in \mathcal{L}^p_{(0,1)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ konstruiert, der optimale $\mathcal{L}^p$-Abschätzungen erfüllt (vgl. [ChKrMa]). Weitere Betrachtungen über die Optimalität von $\mathcal{L}^p$- und Hölder-Abschätzungen von Lösungen der Gleichung $\overline{\partial}U = F$ auf $D^{(m)}$ für $F \in \mathcal{L}^p_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ stehen in der Arbeit [He] von Hefer.

In dieser Arbeit wird der gleiche Integral-Lösungsoperator für integrable Formen benutzt, der auch in [ChKrMa] und [He] verwendet wurde. Dieser Lösungsoperator muß gegen den euklidischen Abstand $\delta(z)$ von der endlichen Punktmenge $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}) \subset bD^{(m)}$ abgeschätzt werden und nicht wie üblicherweise gegen die Randdistanz.

Eine ähnliche Situation wurde von Fischer in [Fi] für beschränkte, streng pseudokonvexe Gebiete D mit $\mathcal{C}^2$-Rand mit einer hinreichend glatten *abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit N der Kodimension d im Rand bD* untersucht. Fischer betrachtet in [Fi] die Lösbarkeit des Problems $\overline{\partial}u = f$ mit Abschätzungen für auf D stetige geschlossene Formen f, die mit $\delta^D_N(z) := \mathrm{dist}(z, N)$ die Bedingung $|f(z)| \leq C_f\, (\delta^D_N(z))^{-\gamma}$ für einem reellen Parameter γ mit $0 \leq \gamma < d+1$ und eine von f abhängige Konstante $C_f > 0$ erfüllen. Er konstruiert einen Lösungsoperator für auf D stetige, integrable, geschlossene $(0, q)$-Formen f, der für f mit $|f(z)| \leq C_f\, (\delta^D_N(z))^{-\gamma}$ (mit $0 \leq \gamma < d+1$) gegen $\delta^D_N(z)$ abgeschätzt werden kann.

Die von Fischer benutzten Methoden lassen sich auf den Fall komplexer Pseudoellipsoide mit endlichen Punktmengen im Rand übertragen, wobei die Ergebnisse wegen der schwächeren geometrischen Eigenschaften des Randes schlechter ausfallen. Da bei dieser Vorgehensweise die spezielle Lage der endlichen Punktmenge $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ im Rand $bD^{(m)}$ nicht eingeht, darf die Menge $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ bei den Abschätzungen des

Lösungsoperators $\widehat{T}_q$ auf $D^{(m)}$ durch eine beliebige endliche Teilmenge N im Rand $bD^{(m)}$ ersetzt werden. Als zusätzliches Ergebnis ergibt sich also eine Antwort auf die Fragestellung in [Fi] für den Fall komplexer Pseudoellipsoide mit einer endlichen Punktmenge im Rand und für glatte Formen F.[4]

Die Themenstellung dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. Ingo Lieb. Ihm sowie Frau Dr. Lan Ma möchte ich für die gute Betreuung und Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit danken.

[4] Es würde genügen, statt Glattheit stetige Differenzierbarkeit der Formen F auf $D^{(m)}$ vorauszusetzen.

1.2 Notation

Vor der Formulierung der Ergebnisse der Arbeit sollen zunächst die wichtigsten grundlegenden Notationen und Begriffe eingeführt werden.

(i) Grundlegende Bezeichnungen

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bezeichnen die natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Weiter sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mit $|\cdot|$ wird immer der Absolutbetrag einer reellen oder komplexen Zahl und mit $\|\cdot\|$ wird die euklidische Norm von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ oder die Norm von Vektoren im $\mathbb{C}^n$ mit $n > 1$ bzgl. des Standard-Skalarprodukts bezeichnet.

Die Koordinaten $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_j = x_j + i\, y_j \in \mathbb{C}$ mit den reellen Koordinaten x_j und y_j seien die Standardkoordinaten von $\mathbb{C}^n$. Dann wird die *Volumenform des* $\mathbb{C}^n$ durch die Formel

$$dV(z) := \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n$$

definiert. Wird z_j durch die reellen Koordinaten x_j und y_j ausgedrückt, ist $dV(z)$ gerade die übliche reelle Volumenform $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ von $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

Sind $t := (t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ beliebige (lokale) reelle Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$, dann bezeichne

$$d\sigma_k(t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_k}) := dt_{j_1} \wedge dt_{j_2} \wedge \cdots \wedge dt_{j_k}$$

die reelle Volumenform der Koordinaten $t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_k}$.[5]

Für $w \in \mathbb{C}^n$ und $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, sei $B(w, R) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - w\| < R\}$ die *offene Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt w* im $\mathbb{C}^n$.

Für $w \in \mathbb{C}^n$ und $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}^n$ wird der *offene Polyzylinder um w mit Multiradius R* als

$$P(w, R) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < R_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

notiert. Ist $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, so sei $P(w, R) := P(w, (R, \ldots, R))$.

(ii) Funktionenräume

Sei U eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$. Dann bezeichnet $\mathcal{L}^1(U)$ den *Raum aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf U*. Die $\mathcal{L}^1$-Norm auf U ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(U)} := \int\limits_{\zeta \in U} |f(\zeta)|\, dV(\zeta) \qquad \text{für } f \in \mathcal{L}^1(U).$$

[5] Insbesondere gilt mit dieser Notation $dV(z) = d\sigma_{2n}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$.

$\mathcal{C}^0(U)$ ist der *Raum aller stetigen Funktionen auf* U, und mit $\mathcal{C}^k(U)$ (mit $k \in \mathbb{N}$) wird der *Raum aller auf* U *k-mal stetig differenzierbaren Funktionen* bezeichnet.

Weiter gelte $\mathcal{C}^\infty(U) := \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}^k(U)$. Die Funktionen in $\mathcal{C}^\infty(U)$ werden auch als glatte Funktionen auf U bezeichnet.

(iii) Differentialformenräume

Es sei $\mathcal{F}(U)$ ein beliebiger Funktionenraum auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$.

Dann wird mit $\mathcal{F}_{(p,q)}(U)$ der *Raum der Differentialformen vom Typ* (p,q) *mit Koeffizientenfunktionen in* $\mathcal{F}(U)$ bezeichnet. Eine Form $\omega \in \mathcal{F}_{(p,q)}(U)$ besitzt eine Darstellung $\omega(z) = \sum_{I,J} \omega_{I,J}(z)\, dz^I \wedge d\overline{z}^J$ mit $\omega_{I,J} \in \mathcal{F}(U)$, wobei jeweils über alle aufsteigend geordneten p-Tupel $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p) \in \{1, 2, \ldots, n\}^p$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ und alle aufsteigend geordneten q-Tupel $J = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$, $J \in \{1, 2, \ldots, n\}^q$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ summiert wird und $dz^I := dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, $d\overline{z}^J := d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}$ ist.

Der *Absolutbetrag einer Form* ω in Punkt $z \in U$ ist $|\omega(z)| := \sum_{I,J} |\omega_{IJ}(z)|$.

Ist $\mathcal{F}(u)$ ein normierter Raum mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{F}(u)}$, so wird die *Norm einer Form* $\omega \in \mathcal{F}_{(p,q)}(U)$ durch $\|\omega\|_{\mathcal{F}(U)} := \sum_{I,J} \|\omega_{IJ}\|_{\mathcal{F}(U)}$ definiert. (Die Summation erfolgt jeweils wie oben.)

(iv) Geometrische Eigenschaften von Gebieten im $\mathbb{C}^n$

Sei D eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$. Dann wird D als *Bereich* bezeichnet, und ein zusammenhängender Bereich wird *Gebiet* genannt. Der *Rand eines Gebietes* D wird mit bD bezeichnet. $\Delta bD := \{(\zeta, z) \in bD \times bD : \zeta = z\}$ ist die *Randdiagonale* des Gebietes D.

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ hat einen *differenzierbaren Rand der Klasse* $\mathcal{C}^k$ oder $\mathcal{C}^k$*-Rand* $(1 \leq k \leq \infty)$, wenn es zu jedem Punkt $p \in bD$ eine offene Umgebung U von p und eine reellwertige Funktion $r \in \mathcal{C}^k(U)$ gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) $U \cap D = \{z \in U : r(z) < 0\}$, (ii) $dr(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Die Funktion r wird als *lokale* $\mathcal{C}^k$*-definierende Funktion für* D *in* p oder als *lokale* $\mathcal{C}^k$*-Randfunktion für* D *in* p bezeichnet. Ist die offene Menge U eine Umgebung von bD, so wird r als *(globale)* $\mathcal{C}^k$*-Randfunktion für* D oder *(globale)* $\mathcal{C}^k$*-definierende Funktion für* D bezeichnet.

Das Gebiet D heißt *glatt berandet*, wenn D einen $\mathcal{C}^\infty$-Rand hat.

Sei p ein Punkt aus dem Rand eines Gebietes D mit $\mathcal{C}^k$-Rand $(k \geq 1)$ und r eine lokale $\mathcal{C}^k$-Randfunktion für D in p. Dann heißt der komplex $(n-1)$-dimensionale Raum

$$\mathrm{T}_p^{\mathbb{C}}(bD) := \left\{ t \in \mathbb{C}^n : \partial r(p)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r(p)}{\partial z_j}\, t_j = 0 \right\}$$

der *holomorphe Tangentialraum an den Rand* bD *im Punkt* $p \in bD$.

Eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ heißt *pseudokonvex*, wenn es eine Ausschöpfungsfunktion $\varphi \in \mathcal{C}^2(D)$ für D gibt, die streng plurisubharmonisch auf D ist. (Eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ heißt *Ausschöpfungsfunktion für* D, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $D_c := \{z \in D : \varphi(z) < c\}$ relativ kompakt in D ist.)

Eine Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{C}^2$-Rand heißt *Levi-pseudokonvex*, wenn es für jeden Randpunkt $p \in bD$ eine lokale $\mathcal{C}^2$-Randfunktion r für D in p gibt, so daß die Leviform

$$\mathrm{L}_z(r,t) := \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_l}\, t_j \bar{t}_l$$

für alle Randpunkte z aus einer Umgebung von p die Levi-Bedingung erfüllt: $\mathrm{L}_z(r,t) \geq 0$ für alle $t \in \mathrm{T}_z^{\mathbb{C}}(bD)$.

Das Gebiet D heißt *streng Levi-pseudokonvex*, wenn es für alle $p \in bD$ eine lokale $\mathcal{C}^2$-Randfunktion r für D in p gibt mit $\mathrm{L}_p(r,t) > 0$ für alle $t \in \mathrm{T}_p^{\mathbb{C}}(bD) \setminus \{0\}$.

(v) Notation bei Abschätzungen

Seien U eine nichtleere Menge und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei nichtnegative Abbildungen. Dann heißt f *von kleinerer Ordnung* als g, bzw. g *von größerer Ordnung* als f, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß gilt:

$$f(x) \leq Cg(x) \quad \text{für alle} \quad x \in U.$$

Dieser Sachverhalt wird mit

$$f \lesssim g \quad \text{oder mit} \quad g \gtrsim f$$

bezeichnet. f heißt *von gleicher Ordnung* wie g, wenn gilt: $f \lesssim g$ und $g \lesssim f$. Dies wird auch kürzer als $f \approx g$ notiert.

In verschiedenen Schritten einer Abschätzung auftretende Konstanten werden gleich bezeichnet (mit C, $\widetilde{C}$ oder ähnlich), obwohl sich ihr Wert gegebenenfalls mit jeder Umformung ändert. Die Konstanten sind immer reell und positiv, falls nichts anderes vereinbart wird.

1.3 Ergebnisse der Arbeit

Um die Ergebnisse klarer formulieren zu können, werden *normierte Teilräume* von $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ bzw. $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(S^{(m)})$ mit sogenannten *gewichteten Normen* eingeführt, die das Wachstumsverhalten der Formen f und der konstruierten Lösungen u der Gleichung $\overline{\partial} u = f$ widerspiegeln.

Definition 1.3.1 (Formenräume mit Wachstumsverhalten auf $S^{(m)}$)
Sei $0 \leq q \leq n$. Für $k \in \mathbb{R}$ mit $k < 0$ werden auf $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und für $l \in \mathbb{R}$ werden auf $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(S^{(m)})$ die folgenden Normen definiert: Für $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und $u \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(S^{(m)})$ seien

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} &:= \max\left\{ \sup_{\zeta \in \overline{S^{(m)}} \cap \{\|\zeta\| \leq 1\}} |f(\zeta)|, \sup_{\zeta \in \overline{S^{(m)}} \cap \{\|\zeta\| > 1\}} |f(\zeta)| \, \|\zeta\|^{-k} \right\} \\
\|u\|_{\mathcal{F}^l(S^{(m)})} &:= \max\left\{ \sup_{\zeta \in S^{(m)} \cap \{\|\zeta\| \leq 1\}} |u(\zeta)|, \sup_{\zeta \in S^{(m)} \cap \{\|\zeta\| > 1\}} |u(\zeta)| \, \|\zeta\|^{-l} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Teilräume von $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ bzw. $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(S^{(m)})$ mit endlicher $\|\cdot\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$-Norm bzw. endlicher $\|\cdot\|_{\mathcal{F}^l(S^{(m)})}$-Norm heißen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) &:= \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) : \begin{array}{c} \exists C \in \mathbb{R},\, C > 0 \textit{ mit } |f(\zeta)| \leq C\|\zeta\|^k \\ \textit{für } \zeta \in \overline{S^{(m)}} \textit{ mit } \|\zeta\| \to \infty \end{array} \right\} \\
&= \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) : \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} < \infty \right\} \\
\mathcal{F}^l_{(0,q)}(S^{(m)}) &:= \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(S^{(m)}) : \|u\|_{\mathcal{F}^l(S^{(m)})} < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$: $|f(\zeta)| = \sum_{|J|=q} |f_J(\zeta)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$

Mit diesen Formenräumen können die *Ergebnisse* so formuliert werden:

Für jedes $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ werden ein Lösungsoperator T_q der Gleichung $\overline{\partial} u = f$ auf $\mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q) \leq 0$ konstruiert und eine reelle Zahl $l(k,m,q)$ bestimmt, so daß gilt:

(i) $T_q : \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial}) \longrightarrow \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ für alle $k < k_0(m,q)$.

(ii) Für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ gilt $\overline{\partial} T_q f = f$ auf $S^{(m)}$.

(iii) Es gibt eine nur von $k < k_0(m,q)$ abhängige Konstante $C_k > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $l := l(k,m,q)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|T_q f\|_{\mathcal{F}^l(S^{(m)})} \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Dabei ist die reelle Zahl $l(k,m,q)$ möglichst klein zu bestimmen. Die Angabe der genauen Koeffizienten $l(k,m,q)$ für $k < k_0(m,q)$, die als Hauptergebnis im Satz 7.1.1 bewiesen werden, erfordert sehr viele Fallunterscheidungen. Daher wird hier nur eine etwas gröbere Abschätzung der $l(k,m,q)$ angegeben, die es gestattet viele Fälle zusammenzufassen und daher einen besseren Überblick über die Art der Ergebnisse ermöglicht. Für die genaueren Abschätzungen wird auf das siebte Kapitel verwiesen. Dort sind auch die konkreten Abschätzungen für $l(k,m,q)$ für den Sonderfall des klassischen Siegelgebietes $S := S^{(1,\dots,1)}$ (vgl. Folgerung 7.1.3) angegeben. Zur Formulierung der Ergebnisse werden folgende Bezeichnungen benötigt:[6]

$$M := \max\{m_1,\dots,m_n\} = \max\{m_{n-1},m_n\}$$

$$\gamma = \gamma(k,m,q) := \begin{cases} 2m_{n-1}\alpha(k,m,q) & \text{für} \quad k \geq -1 - m_n\nu(m,q) \\ 0 & \text{für} \quad k < -1 - m_n\nu(m,q) \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \alpha(k,m,q) := \nu(m,q) + \frac{1-|k|}{\kappa(k,m,q)} \quad \text{und} \quad \nu = \nu(m,q) := 1 + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_l}$$

$$\text{und} \quad \kappa = \kappa(k,m,q) := \begin{cases} m_n & \text{für} \quad (\ m_n \leq 2m_q\ ) \\ 2m_q & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \leq 1\ ) \\ m_n & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \geq 1\ ) \end{cases}$$

$$\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_1(m,q) := \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{n-l}} \quad \text{für } q \geq 2$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu) := \frac{1}{m_n} + \frac{(1+\mu)}{2m_{n-q+1}} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} \quad \text{für } q \geq 2$$

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m,q) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (q = 1\ ) \\ \widetilde{\alpha}_2(m,q,0) & \text{für} \quad (\ q \geq 2 \text{ und } m_n \geq 2m_{n-q+1}\ ) \\ \widetilde{\alpha}_1(m,q) & \text{für} \quad (\ q \geq 2 \text{ und } m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

Für das Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ (mit $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$) und $q \in \{1,2,\dots,n\}$ sei $g : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) := g(x,m,q)$ die folgende Funktion:

$$g(x) = g(x,m,q) := \min\left\{0,\ -1 - \widehat{\kappa}(x,m,q)\left(\nu(m,q) - \frac{x}{2m_{n-1}}\right)\right\} \quad \text{mit}$$

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(x,m,q) := \begin{cases} m_n & \text{für} \quad (\ m_n \leq 2m_q\ ) \\ 2m_q & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } x \geq 2m_{n-1}\nu(m,q)\ ) \\ m_n & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } x \leq 2m_{n-1}\nu(m,q)\ ) \end{cases}$$

[6]Bei dem Parameter m in den Bezeichnungen handelt es sich immer um das Parameter-Tupel $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ des Pseudo-Siegelgebietes $S^{(m)}$.

Satz 7.1.2

Sei $S^{(m)} := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \varrho^{(m)}(\zeta) := \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} + \mathrm{Im}\,(\zeta_n^{m_n}) - 1 < 0\}$ *mit* $n \geq 2$. *Dann existieren für* $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *und* $k < k_0(m,q) := g(2n,m,q)$ *lineare Operatoren* $T_q : \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ *mit* $k < k_0(m,q)$ *gilt* $\overline{\partial} T_q f = f$ *auf* $S^{(m)}$.

(ii) Es gibt eine nur von k *abhängige Konstante* $C_k > 0$, *so daß für alle Formen* $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ *mit* $k < k_0(m,q)$ *die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|T_q f\|_{\mathcal{F}^{l(k,m,q)}(S^{(m)})} \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Dabei ist $l := l(k,m,q)$ *folgendermaßen zu wählen: (Es ist zu beachten, daß die Funktion* $g(x) := g(x,m,q)$ *von* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *und* q *abhängt und daß in den folgenden Abschätzungen immer* $\gamma := \gamma(k,m,q)$ *und* $\widetilde{\alpha} := \widetilde{\alpha}(m,q)$ *ist.)*

(a) Für $k < g(2q)$ *gilt:*

$$l \geq \; -\widetilde{\alpha}\, \min\{m_n, 2m_1\} \quad \text{für} \quad k < g(1)$$

$$l \; > \begin{cases} (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})\, \min\{m_n, 2m_1\} & \text{für} \quad g(1) \leq k \leq g(1+\widetilde{\alpha}) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}) m_n & \text{für} \quad g(1+\widetilde{\alpha}) \leq k < g(2q) \end{cases}$$

(b) Für $g(2q) \leq k < g(2n-1)$ *gilt:*

$$l > \begin{cases} \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q+1)-\widetilde{\alpha}\Big) m_n & \text{für} \begin{cases} (\ \gamma - [\gamma] > \frac{(M-1)}{(2M-1)} \\ \ \text{und } k < g(2n-2)\ ) \end{cases} \\ \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}\Big) m_n & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Für ($q \leq n-1$ *und* $g(2n-1) \leq k < g(2n)$ *) gilt:*

$$l > \Big(\gamma + (M-1)(2n-2q) + (2M-1)(\gamma-[\gamma]) - \widetilde{\alpha}\Big) m_n$$

$\square$

2 Übertragung des $\overline{\partial}$-Problems von den Pseudo-Siegelgebieten auf komplexe Pseudoellipsoide

2.1 Biholomorphie der Pseudo-Siegelgebiete zu komplexen Pseudoellipsoiden

Zunächst werden die (geometrischen) Eigenschaften der unbeschränkten Pseudo-Siegelgebiete $S^{(m)} \subset \mathbb{C}^n$ (mit $m := (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{n-1}$ und $n \geq 2$)

$$S^{(m)} := \left\{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : \varrho^{(m)}(\zeta) := \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} + \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) - 1 < 0 \right\},$$

zusammengestellt.

Hilfssatz 2.1.1 (Eigenschaften der Pseudo-Siegelgebiete)

(i) $S^{(m)}$ *ist zusammenhängend, unbeschränkt, glatt berandet, pseudokonvex und auch Levi-pseudokonvex.*

(ii) Das klassische Siegelgebiet $S := S^{(1,\ldots,1)} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n : \varrho(\zeta) := \varrho^{(1,\ldots,1)}(\zeta) < 0 \right\}$ *ist außerdem konvex und streng Levi-pseudokonvex. Es wird durch die Cayley-Transformation*

$$b_{(1,\ldots,1)}(\zeta) := \left(\left(\frac{2}{2i - \zeta_n} \right) \zeta_1, \ldots, \left(\frac{2}{2i - \zeta_n} \right) \zeta_{n-1}, \left(\frac{1}{2i - \zeta_n} \right) \zeta_n \right)$$

biholomorph auf die Einheitskugel $B^{(n)} := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : s(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 - 1 < 0 \right\}$ *im* $\mathbb{C}^n$ *abgebildet.*

Beweis:
Die Bereiche $S^{(m)}$ sind offenbar unbeschränkt und glatt berandet. Der Zusammenhang und die Pseudokonvexität folgen aus der Biholomorphie zu den zusammenhängenden, beschränkten und pseudokonvexen Gebieten $D^{(m)}$, die in Satz 2.1.5 bewiesen wird. Die Bereiche $S^{(m)}$ sind also pseudokonvexe Gebiete. Durch Berechnen der Leviform der Randfunktion $\varrho^{(m)}$ wird gezeigt, daß die Gebiete $S^{(m)}$ Levi-pseudokonvex und das Gebiet S streng Levi-pseudokonvex sind. Die Hesseform der Randfunktion ϱ des klassischen Siegelgebietes $\mathrm{H}_\zeta(\varrho, t) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} |t_j|^2$ ist positiv semidefinit, also ist S konvex. Die Biholomorphie von S zur Einheitskugel $B^{(n)}$ wird

im Satz 2.1.5 als Sonderfall mitgezeigt.[7] □

Bemerkung 2.1.2
Das klassische Siegelgebiet S ist auch streng pseudokonvex im üblichen Sinn: Da alle Eigenwerte der Leviform von ϱ auf $\mathbb{C}^n$ nichtnegativ sind, ist $\widetilde{\varrho}(\zeta) := e^{\varrho(\zeta)} - 1$ eine glatte Funktion auf $\mathbb{C}^n$ mit $S = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \widetilde{\varrho}(\zeta) < 0\}$, die auf einer Umgebung des Randes streng plurisubharmonisch ist.

$$\mathrm{L}_\zeta(\widetilde{\varrho}, t) = e^{\varrho(\zeta)} \left(\left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varrho(\zeta)}{\partial \zeta_l} t_l \right|^2 + \mathrm{L}_\zeta(\varrho, t) \right) > 0 \quad \text{für alle } \zeta \in bS, t \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

Diese Bedingung ist auch für Punkte ζ aus einer Umgebung des Randes noch erfüllt.

Es werden einige später nützliche Abschätzungen angegeben, die die Geometrie der Gebiete $S^{(m)}$ widerspiegeln.[8]

Hilfssatz 2.1.3 (Abschätzungen auf den Pseudo-Siegelgebieten)

(i) Auf $\overline{S^{(m)}}$ gilt: $|\zeta_n^{m_n}| \lesssim |2i - \zeta_n^{m_n}|$.

(ii) Auf $\overline{S^{(m)}} \setminus P(0,2)$ gilt für $j \neq n$ $|\zeta_j|^{2m_j} \leq \dfrac{3}{2} |\zeta_n|^{m_n}$.

(iii) Auf $\overline{S^{(m)}} \setminus P(0,2)$ gilt $|\zeta_n^{m_n}| \gtrsim |2i - \zeta_n^{m_n}|$.

(iv) Auf $\overline{S^{(m)}} \setminus P(0,2)$ gilt $|\zeta_n| \gtrsim \|\zeta\|^{\min\{1, \frac{2m_1}{m_n}\}}$.
Dabei ist zu beachten, daß $m_1 = \min\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ *ist.*

Beweis:

(i) Es werden zwei Fälle unterschieden.

(a) Sei $\mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) \leq 0$, dann folgt:

$$\begin{aligned} |2i - \zeta_n^{m_n}| &\approx |2 - \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n})| + |\mathrm{Re}(\zeta_n^{m_n})| \\ &= 2 + |\mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n})| + |\mathrm{Re}(\zeta_n^{m_n})| \\ &\approx 2 + |\zeta_n^{m_n}| \end{aligned}$$

[7] Im Anhang A ist zusätzlich ein direkter Beweis der Pseudokonvexität der Gebiete $S^{(m)}$, sowie der genaue Nachweis der Levi-Pseudokonvexität von $S^{(m)}$ (bzw. strengen Levi-Pseudokonvexität von S) angegeben.

[8] Im Anhang B wird eine geometrische Anschauung von der Gestalt der Pseudo-Siegelgebiete gegeben.

(b) Sei $\mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) > 0$. Dann folgt $\mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) \leq 1$ aus $\varrho^{(m)}(\zeta) \leq 0$:

$$1 - \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) \geq \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} \geq 0$$

$$\begin{aligned} |2i - \zeta_n^{m_n}| &\approx |2 - \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n})| + |\mathrm{Re}(\zeta_n^{m_n})| \\ &\geq 1 + |\mathrm{Re}(\zeta_n^{m_n})| \\ &\geq |\mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n})| + |\mathrm{Re}(\zeta_n^{m_n})| \\ &\approx |\zeta_n^{m_n}| \end{aligned}$$

(ii) Aus der Gleichung der Randfunktion $\varrho^{(m)}$ folgt

$$|\zeta_j|^{2m_j} \leq \sum_{l=1}^{n-1} |\zeta_l|^{2m_l} \leq 1 - \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) \leq 1 + |\zeta_n^{m_n}|.$$

Sei nun $\zeta \in \overline{S^{(m)}} \setminus P(0,2)$. Dann existiert mindestens ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $|\zeta_j| \geq 2$. Es werden zwei Fälle unterschieden.

(a) Sei $|\zeta_n| \geq 2$. Dann ist

$$|\zeta_j|^{2m_j} \leq 1 + |\zeta_n^{m_n}| \leq \frac{3}{2} |\zeta_n^{m_n}|.$$

(b) Sei $|\zeta_n| < 2$. Dann existiert ein $j \neq n$ mit $|\zeta_j| \geq 2$.

$$4 \leq |\zeta_j|^{2m_j} \leq 1 + |\zeta_n^{m_n}| \quad \Longrightarrow \quad 3 \leq |\zeta_n^{m_n}|$$

Damit folgt

$$|\zeta_j|^{2m_j} \leq 1 + |\zeta_n^{m_n}| \leq \frac{4}{3} |\zeta_n^{m_n}|.$$

(iii) Weil $\zeta \in \overline{S^{(m)}} \setminus P(0,2)$ ist, existiert ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $|\zeta_j| \geq 2$. Es werden wieder zwei Fälle unterschieden.

(a) Sei $|\zeta_n| \geq 2$. Dann gilt

$$|2i - \zeta_n^{m_n}| \leq 2 + |\zeta_n^{m_n}| \leq 2|\zeta_n^{m_n}|.$$

(b) Sei $|\zeta_n| < 2$. Dann ist $|\zeta_j| \geq 2$ für ein $j \neq n$. Aus (ii) folgt dann $4 \leq |\zeta_j|^{2m_j} \leq \frac{3}{2} |\zeta_n^{m_n}|$, also $\frac{8}{3} \leq |\zeta_n^{m_n}|$.

$$|2i - \zeta_n^{m_n}| \leq 2 + |\zeta_n^{m_n}| \leq 2|\zeta_n^{m_n}|$$

(iv) Aus (ii) ergibt sich

$$\|\zeta\| \approx \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j| \lesssim |\zeta_n| + \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_n|^{\frac{m_n}{2m_j}}.$$

Entweder ist $|\zeta_n| \geq 2$, oder es ist $|\zeta_n| < 2$. Im zweiten Fall existiert ein $j \neq n$ mit $|\zeta_j| \geq 2$, und mit der gleichen Argumentation wie in (iii) folgt $|\zeta_n| > 1$. Es gilt also

$$\|\zeta\| \lesssim |\zeta_n|^{\max\{1, \frac{m_n}{2m_1}, \dots, \frac{m_n}{2m_{n-1}}\}} = |\zeta_n|^{\max\{1, \frac{m_n}{2m_1}\}}.$$

□

Da es sich bei den Gebieten $S^{(m)}$ um pseudokonvexe Gebiete handelt, ist das $\overline{\partial}$-Problems immer lösbar. Es liegen aber zunächst keine Informationen über das Verhalten spezieller Lösungen, insbesondere keine Abschätzungen spezieller Lösungen vor.

Um einen Lösungsoperator für das $\overline{\partial}$-Problem auf $S^{(m)}$ mit Abschätzungen zu erhalten, wird das Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ mit einem Biholomorphismus auf das folgende *komplexe Pseudoellipsoid* $D^{(m)}$ abgebildet:

$$D^{(m)} := \left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : r^{(m)}(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} - 1 < 0 \right\}$$

Hilfssatz 2.1.4 (Eigenschaften der komplexen Pseudoellipsoide)
Die komplexen Pseudoellipsoide $D^{(m)}$ sind beschränkte, glatt berandete und konvexe (und damit auch pseudokonvexe) Gebiete im $\mathbb{C}^n$. $D^{(1,\dots,1)}$ ist die Einheitskugel $B^{(n)}$ im $\mathbb{C}^n$, also streng konvex (und damit auch streng pseudokonvex). Für $m \neq (1, \dots, 1)$ ist $D^{(m)}$ nur schwach pseudokonvex.

Beweis:
Der Beweis steht im wesentlichen in [We] (Seite 19, Satz 5.1). □

Satz 2.1.5 (Biholomorphie von $S^{(m)}$ und $D^{(m)}$)
Für $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $n \geq 2$ und $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{n-1}$ seien $B_{(m)}$ und $b_{(m)}$ die folgenden Abbildungen:

$$B_{(m)} \ : \ \mathcal{D}(B_{(m)}) \to \mathbb{C}^n \quad mit \quad \mathcal{D}(B_{(m)}) := \mathbb{C}^{n-1} \times \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^{m_n}) + 1 > 0\}$$

$$B_{(m)}(z) := \left(\left(\frac{i}{1+z_n^{m_n}}\right)^{1/m_1} z_1, \ldots, \left(\frac{i}{1+z_n^{m_n}}\right)^{1/m_{n-1}} z_{n-1}, \left(\frac{2i}{1+z_n^{m_n}}\right)^{1/m_n} z_n\right)$$

$$b_{(m)} : \mathcal{D}(b_{(m)}) \to \mathbb{C}^n \quad mit \quad \mathcal{D}(b_{(m)}) := \mathbb{C}^{n-1} \times \{\zeta \in \mathbb{C} : 2 - \mathrm{Im}(\zeta^{m_n}) > 0\}$$

$$b_{(m)}(\zeta) := \left(\left(\frac{2}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_1} \zeta_1, \ldots, \left(\frac{2}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_{n-1}} \zeta_{n-1}, \left(\frac{1}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_n} \zeta_n\right)$$

Dabei sollen immer die Hauptzweige der Wurzeln gewählt werden. Weiter bezeichne $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ *die folgende endliche Teilmenge von* $bD^{(m)}$*:*

$$\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}) := \left\{z^{(\lambda)} := (0, \ldots, 0, e^{i\pi(1+2\lambda)/m_n}) : \lambda = 0, 1, \ldots m_n - 1\right\}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) *Die Abbildungen* $B_{(m)}$ *und* $b_{(m)}$ *sind wohldefiniert und holomorph.*

(ii) *Die Abbildung* $B_{(m)}$ *bildet* $\mathcal{D}(B_{(m)})$ *biholomorph auf* $\mathcal{D}(b_{(m)})$ *ab. Die Abbildung* $b_{(m)}$ *ist die Inverse zu* $B_{(m)}$*.*

(iii) $B_{(m)}$ *bildet das komplexe Pseudoellipsoid* $D^{(m)}$ *biholomorph auf das Pseudo-Siegelgebiet* $S^{(m)}$ *ab, und es gilt* $B_{(m)}(bD^{(m)} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})) = bS^{(m)}$*.*

(iv) $\lim\limits_{\zeta \in \overline{S^{(m)}}, \|\zeta\| \to \infty} b_{(m)}(\zeta) \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$

(Dabei werden auch tatsächlich alle $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ *getroffen.*[9]*)*

Bemerkung 2.1.6 (Notation)

Die Abbildungen $b_{(m)}$ und $B_{(m)}$ treten fast immer im Zusammenhang mit den Gebieten $S^{(m)}$ bzw. $D^{(m)}$ mit dem gleichen Parameter-Tupel $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ auf. Da aus dem Kontext stets eindeutig hervorgeht, welche Parameter $m_1, \ldots, m_n$ die Abbildungen $b_{(m)}$ bzw. $B_{(m)}$ besitzen, werden sie im folgenden nur noch mit b bzw. B bezeichnet.

Beweis:

(i) Die Wohldefiniertheit und Holomorphie der Abbildungen B und b ist offenbar gegeben, denn die m_j-te Wurzel ist eine auf der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ (und auf allen durch Drehstreckungen daraus erzeugten Halbräumen) wohldefinierte, holomorphe Funktion.

[9] Im Anhang B wird genauer darauf eingegangen, gegen welchen Punkt $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ der Punkt $b(\zeta)$ im Grenzübergang $\|\zeta\| \to \infty$ strebt, wenn $\zeta \in \overline{S^{(m)}}$ in eine bestimmte Richtung wächst.

(ii) Es genügt zu zeigen:

$$B(\mathcal{D}(B)) \subset \mathcal{D}(b) \quad \text{und} \quad b(\mathcal{D}(b)) \subset \mathcal{D}(B)$$

$$B \circ b = id_{\mathcal{D}(b)} \quad \text{und} \quad b \circ B = id_{\mathcal{D}(B)}$$

Dann folgt

$$B(\mathcal{D}(B)) = \mathcal{D}(b) \quad \text{und} \quad b(\mathcal{D}(b)) = \mathcal{D}(B),$$

weil $b(\mathcal{D}(b)) \supset b(B(\mathcal{D}(B))) = \mathcal{D}(B)$ und $B(\mathcal{D}(B)) \supset B(b(\mathcal{D}(b))) = \mathcal{D}(b)$ ist.

$$\begin{aligned}
2 - \operatorname{Im}\left((B_n(z))^{m_n}\right) &= \operatorname{Im}\left(2i - \frac{2iz_n^{m_n}}{1+z_n^{m_n}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{2i}{1+z_n^{m_n}}\right) \\
&= \frac{2}{|1+z_n^{m_n}|^2} \operatorname{Im}\left(i + i\overline{z}_n^{m_n}\right) \\
&= \frac{2}{|1+z_n^{m_n}|^2} \left(1 + \operatorname{Re}(z_n^{m_n})\right) \\
&> 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{Re}\left((b_n(\zeta))^{m_n}\right) &= 1 + \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta_n^{m_n}}{2i - \zeta_n^{m_n}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{2i}{2i - \zeta_n^{m_n}}\right) \\
&= \frac{2}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^2} \left(2 - \operatorname{Re}(i\overline{\zeta}_n^{m_n})\right) \\
&= \frac{2}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^2} \left(2 - \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n})\right) \\
&> 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}(b)
\end{aligned}$$

Es gilt also $B(\mathcal{D}(B)) \subset \mathcal{D}(b)$ und $b(\mathcal{D}(b)) \subset \mathcal{D}(B)$.

Die Beziehungen $B \circ b = id_{\mathcal{D}(b)}$ und $b \circ B = id_{\mathcal{D}(B)}$ folgen durch einfaches Nachrechnen. Also ist B ein Biholomorphismus mit der Inversen b.

(iii) Für $\zeta \in \overline{S^{(m)}}$ gilt: $1 \geq \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n}) + \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} \implies 2 - \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n}) \geq 1 > 0$. Also ist $\overline{S^{(m)}}$ in $\mathcal{D}(b)$ enthalten. $\overline{D^{(m)}} - \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}}) \subset \mathcal{D}(B)$ gilt offensichtlich.

$$\varrho^{(m)}(B(z)) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|z_j|^{2m_j}}{|1+z_n^{m_n}|^2} + \operatorname{Im}\left(\frac{2iz_n^{m_n}}{1+z_n^{m_n}}\right) - 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|z_j|^{2m_j}}{|1+z_n^{m_n}|^2} + \operatorname{Im}\left(\frac{2iz_n^{m_n}+2i|z_n|^{2m_n}}{|1+z_n^{m_n}|^2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{|1+z_n^{m_n}|^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^{2m_j} + \operatorname{Im}\left(2iz_n^{m_n}+2i|z_n|^{2m_n}\right) - |1+z_n^{m_n}|^2\right) \\
&= \frac{1}{|1+z_n^{m_n}|^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^{2m_j} + z_n^{m_n} + \overline{z}_n^{m_n} + 2|z_n|^{2m_n} - |1+z_n^{m_n}|^2\right) \\
&= \frac{1}{|1+z_n^{m_n}|^2}\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^{2m_j} - 1\right) \\
&= \frac{1}{|1+z_n^{m_n}|^2}\, r^{(m)}(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^{(m)}(b(\zeta)) &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4|\zeta_j|^{2m_j}}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2} + \frac{|\zeta_n|^{2m_n}}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2} - 1 \\
&= \frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2}\left(4\sum_{j=1}^{n-1}|\zeta_j|^{2m_j} + |\zeta_n|^{2m_n} - |2i-\zeta_n^{m_n}|^2\right) \\
&= \frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2}\left(4\sum_{j=1}^{n-1}|\zeta_j|^{2m_j} - 4 - 4\operatorname{Re}(i\zeta_n^{m_n})\right) \\
&= \frac{4}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}|\zeta_j|^{2m_j} - 1 + \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n})\right) \\
&= \frac{4}{|2i-\zeta_n^{m_n}|^2}\, \varrho^{(m)}(\zeta)
\end{aligned}
$$

Es gilt also:

$$B(D^{(m)}) \subset S^{(m)} \quad \text{und} \quad b(S^{(m)}) \subset D^{(m)}$$

$$B(bD^{(m)} \setminus \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})) \subset bS^{(m)} \quad \text{und} \quad b(bS^{(m)}) \subset bD^{(m)} \setminus \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$$

Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt nun

$$B(D^{(m)}) = S^{(m)} \quad \text{und} \quad B(bD^{(m)} \setminus \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})) = bS^{(m)}.$$

(iv) Für $j = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt unter Ausnutzung von Satz 2.1.3 (ii):

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} |b_j(\zeta)| \;=\; \lim_{\|\zeta\|\to\infty} \left| \left(\frac{2}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_j} \zeta_j \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \lim_{\|\zeta\|\to\infty} \left(\frac{2}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1/m_j} |\zeta_j| \\
&\lesssim \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \left(\frac{2}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1/m_j} |\zeta_n|^{m_n/(2m_j)} \\
&\lesssim \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \left(\frac{|\zeta_n^{m_n/2}|}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1/m_j} \\
&\approx \lim_{|\zeta_n|\to\infty} |\zeta_n|^{-\frac{m_n}{2m_j}} \;=\; 0
\end{aligned}
$$

Nun wird gezeigt, daß $\lim_{\|\zeta\|\to\infty} (b_n(\zeta))^{m_n} = -1$ gilt.

Dann folgt sofort, daß alle $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ auch getroffen werden. Es sei nämlich $\{z_{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D^{(m)}$ mit $\lim_{l\to\infty} z_{(l)} = z^{(\lambda)}$. Dann ist $\{B(z_{(l)})\}_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $S^{(m)}$ mit $\lim_{l\to\infty} |B(z_{(l)})| = \infty$ und $\lim_{l\to\infty} b(B(z_{(l)})) = z^{(\lambda)}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|\zeta\|\to\infty} (b_n(\zeta))^{m_n} &= \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_n} \zeta_n\right)^{m_n} \\
&= \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \frac{\zeta_n^{m_n}}{2i-\zeta_n^{m_n}} \\
&= \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \frac{-(2i-\zeta_n^{m_n})+2i}{2i-\zeta_n^{m_n}} \\
&= \lim_{|\zeta_n|\to\infty} \left(-1+\frac{2i}{2i-\zeta_n^{m_n}}\right) \;=\; -1
\end{aligned}
$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Es genügt nun, das $\overline{\partial}$-*Problem auf* $D^{(m)}$ zu untersuchen:

Wenn z. B. $\widehat{T}_q : \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ ein Lösungsoperator für das $\overline{\partial}$-Problem auf dem Gebiet $D^{(m)}$ ist, dann löst für $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ mit $\overline{\partial} f = 0$ und $B^* f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)})$ der Operator $b^*\widehat{T}_q B^*$ das $\overline{\partial}$-Problem auf $S^{(m)}$. Es gilt dann nämlich wegen $\overline{\partial} B^* f = B^* \overline{\partial} f = 0$

$$\overline{\partial}(b^*\widehat{T}_q B^*)f = b^*(\overline{\partial}\widehat{T}_q(B^*f)) = b^*(B^*f) = f \quad \text{auf } S^{(m)}.$$

Die $\overline{\partial}$-Gleichung wird also jetzt auf dem Gebiet $D^{(m)}$ behandelt, auf dem verschiedene Lösungsoperatoren mit Abschätzungen konstruiert werden können.[10] Aus Satz

[10] vgl. z. B. [ChKrMa] und [We]

2.1.5 folgt, daß für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$

$$F := B^* f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$$

gilt.[11] Die zurückgezogenen Formen F können also in den „ausgezeichneten Randpunkten“ aus $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ Singularitäten haben, und i.a. wird das auch der Fall sein. Da auf dem Gebiet $S^{(m)}$ Lösungen gesucht sind, die gegen $\|\zeta\|$ abgeschätzt werden können, muß auf dem Gebiet $D^{(m)}$ ein Lösungsoperator konstruiert werden, dessen Abschätzungen sich unter Zurückziehen mit b in eine solche Wachstumsbeschränkung transformieren. Das wird im Rest dieses Kapitels genauer untersucht.

Von jetzt an soll folgende Notationskonvention zur Verkürzung der Schreibweise getroffen werden: Differentialformen auf $\overline{S^{(m)}}$ oder $S^{(m)}$ werden immer mit Kleinbuchstaben und Differentialformen auf $D^{(m)}$ immer mit Großbuchstaben bezeichnet. Für $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ wird die mit B auf $D^{(m)}$ zurückgezogene Form mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet, also $F(z) := B^* f(z)$, und analog bezeichne für eine Lösung $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ von $\overline{\partial} U = F$ auf $D^{(m)}$ die Form $u(\zeta) := b^* U(\zeta)$ die zurückgezogene Lösung in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(S^{(m)})$.

[11]**Definition:** F ist in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: (i) F ist auf $\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ definiert. (ii) $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$. (iii) Ist $z \in bD^{(m)} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$, und sind $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ lokale reelle $\mathcal{C}^\infty$-Koordinaten auf einer Umgebung $W(z)$ von z mit $W(z) \cap \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}) = \emptyset$ und $W(z) \cap D^{(m)} = \{z \in W(z) : y_{2n}(z) < 0\}$, dann gilt: $F(z(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}))$ ist $\mathcal{C}^\infty$ in $y_1, \ldots, y_{2n}$ auf $\{y_{2n} \leq 0\}$.

2.2 Die zurückgezogenen Formen

Zunächst werden für $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ die Form $F := B^* f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ und für $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ die Form $u := b^* U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ (mit $1 \le q \le n$) berechnet und dann abgeschätzt.

Für eine $(0,q)$-Form $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$, $f(\zeta) = \sum_{|J|=q} f_J(\zeta)\, d\overline{\zeta}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta}_{j_q}$, gilt

$$F(z) = \sum_{|J|=q} F_J(z)\, d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q} := B^* f(z) = \sum_{|J|=q} f_J(B(z))\, d\overline{B_{j_1}(z)} \wedge \ldots \wedge d\overline{B_{j_q}(z)}.$$

Es wird jeweils über $J = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$ mit $1 \le j_1 < j_2 < \ldots j_q \le n$ summiert.

Für $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$, $U(z) = \sum_{|J|=q-1} U_J(z)\, d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_{q-1}}$, gilt

$$u(\zeta) = \sum_{|J|=q-1} u_J(\zeta)\, d\overline{\zeta}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\zeta}_{j_{q-1}} := b^* U(\zeta) = \sum_{|J|=q-1} U_J(b(\zeta))\, d\overline{b_{j_1}(\zeta)} \wedge \ldots \wedge d\overline{b_{j_{q-1}}(\zeta)}.$$

Es wird jeweils über $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{q-1})$ mit $1 \le 1 j_1 < j_2 < \ldots j_{q-1} \le n$ summiert.

Zur Berechnung der Koeffizientenfunktionen $F_J(z)$ und $u_J(\zeta)$ wird noch eine Verallgemeinerung des Kronecker-Symbols ϵ^A_B für zwei Mengen A und B mit einer vorgegebenen Anordnung der Elemente definiert:

$$\epsilon^A_B := \begin{cases} sign(A,B) & \text{für} \quad A = B \quad \text{als Mengen} \\ 0 & \text{für} \quad A \neq B \quad \text{als Mengen} \end{cases}$$

Dabei ist $sign(A,B)$ das Vorzeichen der Permutation, die die geordneten Mengen A und B ineinander überführt.

Die Differentiale der konjugierten Komponentenfunktionen des Biholomorphismus

$$B(z) \quad := \quad \left(\left(\frac{i}{1+z_n^{m_n}} \right)^{1/m_1} z_1, \ldots, \left(\frac{i}{1+z_n^{m_n}} \right)^{1/m_{n-1}} z_{n-1}, \left(\frac{2i}{1+z_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} z_n \right)$$

lauten:

$$\begin{aligned} d\overline{B_j(z)} \quad &= \quad \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} d\overline{z}_j + \frac{m_n}{m_j} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} \frac{(-\overline{z}_n^{m_n-1}\overline{z}_j)}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} d\overline{z}_n \quad \text{für } j \neq n \\ d\overline{B_n(z)} \quad &= \quad \left(\frac{-2i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{1}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} d\overline{z}_n \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber werden bei der Berechnung der F_J die Sonderfälle $q = 1$ und $q = n$ gesondert betrachtet.

Fall 1: $q = 1$

$$\begin{aligned}
F_j(z) &= f_j(B(z)) \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} \qquad \text{für} \quad j \neq n \\
F_n(z) &= f_n(B(z)) \left(\frac{-2i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{1}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n-1} f_l(B(z)) \, \frac{m_n}{m_l} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_l} \frac{(-\overline{z}_n^{m_n-1}\overline{z}_l)}{(1+\overline{z}_n^{m_n})}
\end{aligned}$$

Fall 2: $q = n$, also $J = (1, 2, \ldots, n)$

$$F_J(z) = f_J(B(z)) \, \frac{2^{1/m_n}}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_l}$$

Fall 3: $2 \leq q \leq n-1$

$$F_J(z) = f_J(B(z)) \prod_{l=1}^{q} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{j_l}} \qquad \text{für} \quad j_q \neq n$$

Für $j_q = n$ gilt mit den Bezeichnungen $J' := (j_1, \ldots, j_{q-1})$ und $\complement J := \{1, \ldots, n\} \setminus J$:

$$\begin{aligned}
F_J(z) = \prod_{l=1}^{q-1} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{j_l}} \Bigg[\; & f_J(B(z)) \left(\frac{-2i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{1}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} \\
+ \sum_{\substack{|K|=q \\ K \setminus J' \in \complement J}} & f_K(B(z)) \; \epsilon^{K}_{(J', K\setminus J')} \, \frac{m_n}{m_{(K\setminus J')}} \left(\frac{-i}{1+\overline{z}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{(K\setminus J')}} \frac{(-\overline{z}_n^{m_n-1}\overline{z}_{(K\setminus J')})}{(1+\overline{z}_n^{m_n})} \; \Bigg]
\end{aligned}$$

Die Summation über $|K| = q$ erfolgt dabei wieder nur über geordnete Tupel $K = (k_1, k_2, \ldots, k_q)$ mit $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_q \leq n$.[12]

Die Koeffizientenfunktionen F_J erfüllen folgende Gleichungen und Abschätzungen, wobei die auftretenden positiven Konstanten C von f unabhängig sind.

Fall 1: $q = 1$

$$\begin{aligned}
|F_j(z)| &= |f_j(B(z))| \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|} \right)^{1/m_j} \qquad \text{für} \quad j \neq n \\
|F_n(z)| &\leq C \Bigg[\; |f_n(B(z))| \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_n}} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n-1} |f_l(B(z))| \, |z_n^{m_n-1}| \, |z_l| \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_l}} \; \Bigg]
\end{aligned}$$

[12]Es ist zu beachten, daß die Menge $(K \setminus J')$ eine einelementige Menge ist. Tritt sie als Index auf, so ist der Index gerade ihr einziges Element.

Fall 2: $q = n$, also $J = (1, 2, \ldots, n)$

$$|F_J(z)| \leq C\, |f_J(B(z))| \left(\frac{1}{|1 + z_n^{m_n}|} \right)^{1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l}}$$

Fall 3: $2 \leq q \leq n - 1$

$$|F_J(z)| \leq C\, |f_J(B(z))| \left(\frac{1}{|1 + z_n^{m_n}|} \right)^{\sum_{l=1}^{q} \frac{1}{m_{j_l}}} \qquad \text{für} \quad j_q < n$$

Für $j_q = n$ gilt:

$$\begin{aligned} |F_J(z)| \;\; &\leq \;\; C \Bigg[\; |f_J(B(z))| \left(\frac{1}{|1 + z_n^{m_n}|} \right)^{1 + \frac{1}{m_n} + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{j_l}}} + \sum_{\substack{|K|=q \\ K \setminus J' \in CJ}} |f_K(B(z))| \\ & \qquad |\epsilon^K_{(J', K\setminus J')}|\, |{z_n}^{m_n - 1}|\, |z_{(K\setminus J')}| \left(\frac{1}{|1 + z_n^{m_n}|} \right)^{1 + \frac{1}{m_{(K\setminus J')}} + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{j_l}}} \; \Bigg] \end{aligned}$$

Die Differentiale der konjugierten Komponentenfunktionen der Inversen

$$b(\zeta) \;\; := \;\; \left(\left(\frac{2}{2i - \zeta_n^{m_n}} \right)^{1/m_1} \zeta_1, \ldots, \left(\frac{2}{2i - \zeta_n^{m_n}} \right)^{1/m_{n-1}} \zeta_{n-1}, \left(\frac{1}{2i - \zeta_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \zeta_n \right)$$

sind:

$$\begin{aligned} d\overline{b_j(\zeta)} \;\; &= \;\; \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} d\overline{\zeta}_j + \frac{m_n}{m_j} \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} \frac{\overline{\zeta}_n^{m_n - 1} \overline{\zeta}_j}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})}\, d\overline{\zeta}_n \quad \text{für } j \neq n \\ d\overline{b_n(\zeta)} \;\; &= \;\; \left(\frac{1}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{(-2i)}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})}\, d\overline{\zeta}_n \end{aligned}$$

Auch bei der Berechnung der Koeffizientenfunktionen u_J werden die Sonderfälle $q - 1 = 0$ und $q - 1 = 1$ der Übersichtlichkeit halber gesondert aufgeführt.

Fall 1: $q - 1 = 0$

$$u(\zeta) = b^* U(\zeta) = (U \circ b)(\zeta)$$

Fall 2: $q - 1 = 1$

$$\begin{aligned} u_j(\zeta) \;\; &= \;\; U_j(b(\zeta)) \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_j} \qquad \text{für} \quad j \neq n \\ u_n(\zeta) \;\; &= \;\; U_n(b(\zeta)) \left(\frac{1}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{(-2i)}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})} \\ & \qquad + \sum_{l=1}^{n-1} U_l(b(\zeta))\, \frac{m_n}{m_l} \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_l} \frac{\overline{\zeta}_n^{m_n - 1} \overline{\zeta}_l}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})} \end{aligned}$$

Fall 3: $2 \leq q-1 \leq n-1$

$$u_J(\zeta) = U_J(b(\zeta)) \prod_{l=1}^{q-1} \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{j_l}} \quad \text{für} \quad j_{q-1} \neq n$$

Für $j_{q-1} = n$ sei $J' := (j_1, j_2, \ldots, j_{q-2})$ und $\complement J := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J$. Dann gilt:

$$u_J(\zeta) = \prod_{l=1}^{q-2} \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{j_l}} \Bigg[U_J(b(\zeta)) \left(\frac{1}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_n} \frac{(-2i)}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})}$$

$$+ \sum_{\substack{|K|=q-1 \\ K \setminus J' \in \complement J}} U_K(b(\zeta))\, \epsilon^K_{(J', K \setminus J')} \frac{m_n}{m_{(K \setminus J')}} \left(\frac{2}{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}} \right)^{1/m_{(K\setminus J')}} \frac{\overline{\zeta}_n^{m_n-1} \overline{\zeta}_{(K \setminus J')}}{(-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n})} \Bigg]$$

Die Koeffizientenfunktionen u_J genügen also folgenden Gleichungen und Abschätzungen, wobei die positiven Konstanten C von U unabhängig sind:

Fall 1: $q-1 = 0$

$$|u(\zeta)| = |U(b(\zeta))|$$

Fall 2: $q-1 = 1$

$$|u_j(\zeta)| \leq C\, |U_j(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{1/m_j} \quad \text{für} \quad j \neq n$$

$$|u_n(\zeta)| \leq C \Bigg[|U_n(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_n}} + \sum_{l=1}^{n-1} |U_l(b(\zeta))|\, |\zeta_n^{m_n-1}|\, |\zeta_l| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_l}} \Bigg]$$

Fall 3: $2 \leq q-1 \leq n-1$

$$|u_J(\zeta)| \leq C\, |U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{\sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{j_l}}} \quad \text{für} \quad j_{q-1} \neq n$$

Für $j_{q-1} = n$ gilt:

$$|u_J(\zeta)| \leq C \Bigg[|U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{j_l}}} + \sum_{\substack{|K|=q-1 \\ K \setminus J' \in \complement J}} |U_K(b(\zeta))|$$

$$|\epsilon^K_{(J', K \setminus J')}|\, |\zeta_n^{m_n-1}|\, |\zeta_{(K\setminus J')}| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{1+\frac{1}{m_{(K\setminus J')}}+\sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{j_l}}} \Bigg]$$

2.3 Skizze des weiteren Vorgehens

Zunächst wird $\overline{D^{(m)}}\setminus\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ in eine Umgebung V von $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ und in $\overline{D^{(m)}}\setminus V$ aufgeteilt.

Definition 2.3.1 (Umgebung von $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}) = \{z^{(\lambda)} : \lambda = 0, 1\ldots, m_n - 1\}$**)**
Es seien $0 < \vartheta << 1$ *und* $0 < \varepsilon << 1$ *gewählt, so daß*

$$\left(\{z \in \mathbb{C} : |z - z_n^{(\lambda)}| < \varepsilon\}\right)^{m_n} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < \vartheta\} \quad \textit{für alle } \lambda = 0, 1, \ldots, m_n - 1$$

und $B(z^{(\lambda)}, 2\varepsilon) \cap B(z^{(\widetilde{\lambda})}, 2\varepsilon) = \emptyset$ *für alle* $\lambda, \widetilde{\lambda} \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$ *mit* $\lambda \neq \widetilde{\lambda}$ *gilt. Dann sei*

$$V := \bigcup_{\lambda=0}^{m_n-1} B(z^{(\lambda)}, \varepsilon) \cap \left(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})\right) = \bigcup_{\lambda=0}^{m_n-1} \left\{z \in \overline{D^{(m)}} : z \neq z^{(\lambda)},\ \|z - z^{(\lambda)}\| < \varepsilon\right\}.$$

Das ε in der vorherigen Definition kann noch weiter verkleinert werden. Bei der Konstruktion des Integral-Lösungsoperators und dem Abschätzen der Lösungen, wird dies auch noch geschehen, damit auf V weitere Eigenschaften gegeben sind.

Definition 2.3.2 (Abstand von $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$**)**
Die Funktion $\delta(z)$ *bezeichne den euklidischen Abstand von der Menge* $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$.

$$\begin{aligned}\delta(z) &:= \mathrm{dist}(z, \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})) = \min_{\lambda \in \{0,1,\ldots m_n-1\}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - z_j^{(\lambda)}|^2 \right)^{1/2} \right\} \\ &= \min_{\lambda \in \{0,1,\ldots m_n-1\}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^2 + |z_n - e^{i\pi(1+2\lambda)/m_n}|^2 \right)^{1/2} \right\}\end{aligned}$$

Satz 2.3.3
Auf $\overline{D^{(m)}}$ *gilt die Abschätzung*

$$(\delta(z))^{2m_{n-1}} \lesssim |1 + z_n^{m_n}| \lesssim \delta(z).$$

Dabei ist zu beachten, daß $m_{n-1} = \max\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ *ist.*

Beweis:
Sei $z \in \overline{D^{(m)}}$ und $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ mit $\delta(z) = \|z - z^{(\lambda)}\|$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz

$$|z_n^{m_n} + 1| = |z_n^{m_n} - (z_n^{(\lambda)})^{m_n}| \lesssim |z_n - z_n^{(\lambda)}| \leq \delta(z).$$

Um den ersten Teil der Ungleichung zu beweisen, müssen zwei Fälle unterschieden werden.

(a) Sei $z \in \overline{D^{(m)}}$ mit $|z_n - z_n^{(\lambda)}| \geq \varepsilon$ für alle $\lambda = 0, 1, \ldots, m_n - 1$.

Nach der Konstruktion der Menge V existiert ein $\widetilde{\vartheta}$ mit $0 < \widetilde{\vartheta} < \vartheta$ und

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1| < \widetilde{\vartheta} \right\} \subset\subset \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_n^{(\lambda)}| < \varepsilon \right\} \right)^{m_n}$$

für alle $\lambda = 0, \ldots, m_n - 1$. Dann gilt $z_n^{m_n} \notin \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \widetilde{\vartheta}\}$, also $|1 + z_n^{m_n}| \geq \widetilde{\vartheta}$. Außerdem gilt $\varepsilon \leq \|z - z^{(\lambda)}\| \leq C$ für alle $\lambda = 0, 1, \ldots, m_n - 1$.

$$(\delta(z))^{2m_{n-1}} \leq \frac{C^{2m_{n-1}}}{\widetilde{\vartheta}} |1 + z_n^{m_n}|$$

(b) Sei $z \in \overline{D^{(m)}}$ mit $|z_n - z_n^{(\lambda)}| < \varepsilon$ für mindestens ein $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$. Dieses λ kann so gewählt werden, daß $\delta(z) = \|z - z^{(\lambda)}\|$ ist. Aus den Forderungen an V folgt, daß $|z_n^{m_n} + 1| < \vartheta$ ist. Für den λ-ten Zweig der m_n-ten Wurzel auf der Kugel $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \vartheta\}$ kann der Mittelwertsatz angewendet werden.

$$|z_n - z_n^{(\lambda)}| \lesssim (1 - \vartheta)^{\frac{1}{m_n} - 1} |z_n^{m_n} + 1|$$

Aus der Bedingung $r(z) \leq 0$ folgt

$$\sum_{l=1}^{n-1} |z_l|^{2m_l} \leq 1 - |z_n|^{2m_n} \leq (1 - |z_n^{m_n}|)(1 + |z_n^{m_n}|) \leq 2|1 + z_n^{m_n}|.$$

Insgesamt ergibt sich also mit $m_{n-1} = \max\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$:

$$\begin{aligned} |1 + z_n^{m_n}| &\gtrsim \sum_{l=1}^{n-1} |z_l|^{2m_l} + |z_n - z_n^{(\lambda)}| \\ &\geq \sum_{l=1}^{n-1} |z_l|^{2m_{n-1}} + |z_n - z_n^{(\lambda)}|^{2m_{n-1}} \\ &\gtrsim \left(\sum_{l=1}^{n-1} |z_l|^2 + |z_n - z_n^{(\lambda)}|^2 \right)^{m_{n-1}} \\ &= \delta(z)^{2m_{n-1}} \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 2.3.4 (Abschätzung für $F = B^* f$ auf $\overline{D^{(m)}} \setminus V$)
Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $F := B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und alle $z \in \overline{D^{(m)}} \setminus V$ gilt:

$$|F(z)| = \sum_{|J|=q} |F_J(z)| \leq C \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Beweis:
Nach Satz 2.3.3 gilt $|1 + z_n^{m_n}| \gtrsim (\delta(z))^{2m_{n-1}} \geq \varepsilon^{2m_{n-1}}$ auf $\overline{D^{(m)}} \setminus V$. Damit folgt die Behauptung aus $|f(B(z))| \leq \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$ und aus den Abschätzungen der F_J. $\square$

Aus den Abschätzungen der $F := B^*f$ in Abschnitt 2.2 ist ersichtlich, daß die Formen $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ im allgemeinen in den Punkten aus $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ Singularitäten besitzen. Die Tatsache, daß die Formen F nur auf $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ Singularitäten haben, legt die Vermutung nahe, daß geeignete Lösungen $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ der Gleichung $\overline{\partial}U = F$ auch höchstens für $z \to z^{(\lambda)}$ für alle Punkte $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ singulär werden.

Die üblichen Abschätzungen einer Lösung U der $\overline{\partial}$-Gleichung auf $D^{(m)}$ bzgl. der Randfunktion $r^{(m)}(z)$ liefern nach Zurückziehen der Lösung keine Abschätzungen gegen $\|\zeta\|$. Nach den Berechnungen im Beweis von Satz 2.1.5 gilt nämlich

$$r^{(m)}(b(\zeta)) = \frac{4}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^2}\, \varrho^{(m)}(\zeta).$$

Für $\zeta \in S^{(m)}$ mit $\|\zeta\| \to \infty$ kann $\varrho^{(m)}(\zeta)$ aber gegen einen beliebigen nichtpositiven Wert streben, oszillieren oder divergieren.

Die Menge $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ wird nach Satz 2.1.5 im Grenzübergang $z \to z^{(\lambda)}$ von dem Biholomorphismus B auf Punkte im Unendlichen abgebildet. Wenn eine Lösung U auf $D^{(m)}$ also Abschätzungen gegen $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ genügt, dann wird die zurückgezogene Lösung Abschätzungen gegen $\|\zeta\|$ erfüllen. Um das genauer zu erklären, werden zunächst die restlichen Resultate dieses Kapitels angegeben, und dann wird erläutert, wie sie im folgenden eingesetzt werden und zu den gewünschten Ergebnissen führen.

(a) In den Abschätzungen der Koeffizientenfunktionen der zurückgezogenen Formen $F := B^*f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ können die $|z_l|$-Terme (für $l < n$) und die $|f_K(B(z))|$ mit Hilfe der Wachstumsbedingung an f eliminiert werden, so daß jedes F auf V einer Abschätzung der folgenden Form genügt: Es existieren eine Konstante $C > 0$ und eine nur von k abhängige Konstante $\widehat{C}_k > 0$, so daß für alle $F := B^*f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und alle $z \in V$ gilt:

$$|F(z)| \leq C\, \widehat{C}_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left(\frac{1}{|1 + z_n^{m_n}|}\right)^{\alpha(k,m,q)}$$

Dabei hängt $\alpha = \alpha(k, m, q)$ explizit von $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, vom Grad q der Form f und vom Parameter k der Wachstumsbedingung ab. Der Parameter

α kann sowohl positiv, negativ oder auch Null sein. Er wird mit wachsendem $|k|$ (also abnehmendem k) kleiner. Für $\alpha < 0$ setzt sich F stetig mit dem Wert Null auf $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ fort.[13]

(b) Mit den Abschätzungen aus Hilfssatz 2.1.3 können in den Abschätzungen der Koeffizientenfunktionen u_J von $u := b^*U$ für $\zeta \in S^{(m)}$ die $|\zeta_l|$-Terme für $l \neq n$ eliminiert werden. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß auf $S^{(m)}$ für alle $u := b^*U$ mit $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ gilt:

$$|u(\zeta)| \leq C\,|U(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|}\right)^{\widetilde{\alpha}(m,q)},$$

wobei $|U(b(\zeta))| := \sum_{|J|=q-1} |U_J(b(\zeta))|$ ist. Dabei hängt $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m,q)$ explizit vom Grad q der Form f und von $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ ab. Der Koeffizient $\widetilde{\alpha}$ ist immer nichtnegativ.

(c) Die Terme $|1 + z_n^{m_n}|$ und $|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1}$ rechnen sich bei Einsetzen von $z = b(\zeta)$ ineinander um.

$$|1 + (b_n(\zeta))^{m_n}| = \left|1 + \frac{\zeta_n^{m_n}}{2i - \zeta_n^{m_n}}\right| = \left|\frac{2i}{2i - \zeta_n^{m_n}}\right| \approx |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1}$$

(d) Aus (a), Satz 2.3.3 und Folgerung 2.3.4 folgt eine Abschätzung der zurückgezogenen Formen F gegen $\delta(z)$: Es gibt eine nur von k abhängige Konstante $\widetilde{C}_k > 0$, so daß für alle $F := B^*f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und alle $z \in \overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ gilt:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \widetilde{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, \delta(z)^{-\gamma(k,m,q)} \quad \text{mit} \\ \gamma(k,m,q) &= \begin{cases} 2m_{n-1}\alpha(k,m,q) & \text{für} \quad \alpha(k,m,q) \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad \alpha(k,m,q) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) Für $\gamma = \gamma(k,m,q) < 2n$ ist $F := B^*f$ Lebesgue-integrabel, und nur dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit betrachtet. Die Bedingung $\gamma(k,m,q) < 2n$ ist offenbar äquivalent zu der Aussage $k < k_0(m,q)$ für eine reelle Zahl $k_0(m,q) \leq 0$, die von Grad der Formen q und den Parameter-Tupel $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ abhängt.

Die Aussage (c) ist klar. Die anderen Abschätzungen müssen noch bewiesen werden. Vorher wird wie angekündigt ein kurzer Überblick über das weitere grundsätzliche Vorgehen gegeben.

[13] Nach den Ergebnissen von Wette in [We] gibt es in diesem Fall beschränkte Lösungen U des $\overline{\partial}$-Problems. Aus (b) folgt damit auch die Existenz beschränkter Lösungen des $\overline{\partial}$-Problems auf $S^{(m)}$. Da dieser besonders einfache Sonderfall in den folgenden Kapiteln mit behandelt wird, wird hier nicht genauer auf die Ergebnisse in [We] eingegangen.

Strategie zur Lösung des $\overline{\partial}$-Problems auf $S^{(m)}$ mit Abschätzungen:

(1) Für $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ wird ein Integral-Lösungsoperator $\widehat{T}_q$ der $\overline{\partial}$-Gleichung auf $D^{(m)}$, $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$, mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

   (i) Für $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ gilt $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$ auf $D^{(m)}$.

   (ii) Zu jedem $\gamma \in [0, 2n)$ gibt es eine Konstante $C_\gamma > 0$ und eine von γ abhängige reelle Zahl $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(\gamma) \leq 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$ mit $\overline{\partial}F = 0$ und $\sup_{z \in D^{(m)}} |F(z)|\, \delta(z)^\gamma =: C_F < \infty$ und für alle $z \in D^{(m)}$ gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C_\gamma\, C_F\, \delta(z)^{\widetilde{\gamma}(\gamma)}$$

(2) Für Formen $F := B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ und $k < k_0(m, q)$ (also $0 \leq \gamma(k, m, q) < 2n$) löst $\widehat{T}_q F$ die Gleichung $\overline{\partial}U = F$ und die Abschätzungen aus (1) gelten mit $\gamma = \gamma(k, m, q)$ aus (d). Aus (d) folgt, daß auf $D^{(m)}$

$$\sup_{z \in D^{(m)}} |F(z)|\, \delta(z)^{\gamma(k,m,q)} \leq \widetilde{C}_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

gilt mit einer nur von k abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_k > 0$. Es gibt also eine nur von $\gamma = \gamma(k, m, q)$ abhängige Konstante $C_\gamma > 0$ und eine reelle Zahl $\widetilde{\gamma}(\gamma) \leq 0$, so daß für alle $F := B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m, q)$ und alle $z \in D^{(m)}$ gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C_\gamma\, \widetilde{C}_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\, \delta(z)^{\widetilde{\gamma}(\gamma(k,m,q))}$$

Dann gilt nach Satz 2.3.3 für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m, q)$ auf $D^{(m)}$:

$$|\widehat{T}_q B^* f(z)| \leq C\, C_\gamma\, \widetilde{C}_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\, |1 + z_n^{m_n}|^{\widetilde{\gamma}(\gamma(k,m,q))}$$

(3) Nach Zurückziehen der Lösung $\widehat{T}_q B^* f$ mit dem Biholomorphismus b folgt aus (b) und (c), daß eine nur von k abhängige Konstante $C_k > 0$ existiert, so daß für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m, q)$ auf $S^{(m)}$ gilt:

$$|b^* \widehat{T}_q B^* f(\zeta)| \leq C_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\, |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\alpha}(m,q) - \widetilde{\gamma}(\gamma(k,m,q))}$$

Mit $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m, q)$ und $\widetilde{\gamma}(\gamma) = \widetilde{\gamma}(\gamma(k, m, q))$ folgt aus Hilfssatz 2.1.3 (iv), daß (mit einer neuen, nur von k abhängigen Konstanten $C_k > 0$) auf $S^{(m)} \setminus P(0, 2)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|b^* \widehat{T}_q B^* f(\zeta)| \leq C_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \begin{cases} \|\zeta\|^{(-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma))\, \min\{m_n, 2m_1\}} & \text{für } (-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) < 0 \\ \|\zeta\|^{(-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) m_n} & \text{für } (-\alpha - \widetilde{\gamma}(\gamma)) \geq 0 \end{cases}$$

Insbesondere existiert für $(-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) \leq 0$ auf $S^{(m)}$ eine beschränkte Lösung, und für $(-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) < 0$ strebt diese für $\|\zeta\| \to \infty$ sogar gegen den Wert Null. Für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ gilt nun $b^*\widehat{T}_q B^* f \in \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ und $\overline{\partial} b^* \widehat{T}_q B^* f = f$ auf $S^{(m)}$, wobei der Parameter $l(k,m,q)$ wie folgt zu wählen ist:

$$l(k,m,q) \geq \begin{cases} (-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) \min\{m_n, 2m_1\} & \text{für} \quad (-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) < 0 \\ (-\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}(\gamma)) m_n & \text{für} \quad (-\alpha - \widetilde{\gamma}(\gamma)) \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Abschätzung der zurückgezogenen Formen

In diesem Abschnitt werden die auf den Seiten 28 und 29 angekündigten Abschätzungen (a), (b), (d) und (e) bewiesen.

Hilfssatz 2.4.1
Sei $1 \le q \le n$. Dann gibt es eine nur von $k < 0$ abhängige Konstante $\widehat{C}_k > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ mit $k < 0$, $f(\zeta) = \sum_{|J|=q} f_J(\zeta)\, d\overline{\zeta}_J$, und alle $z \in V$ die folgenden beiden Abschätzungen gelten:

(i) $|f_J(B(z))| \le \widehat{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, |1 + z_n^{m_n}|^{\frac{|k|}{m_n}}$ *für alle* $|J| = q$

(ii) $|f_J(B(z))| \, |z_l|^{|k|} \le \widehat{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, |1 + z_n^{m_n}|^{\frac{|k|}{m_l}}$ *für alle* $|J| = q$ *und alle* $l \neq n$

Auf ganz $\overline{D^{(m)}}$ gilt außerdem:

(iii) $|z_l| \lesssim |1 + z_n^{m_n}|^{\frac{1}{2m_l}}$ *für* $l \neq n$

Beweis:
Aus der Wachstumsbedingung an f, $|f(\zeta)| \, \|\zeta\|^{|k|} \le \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$ für $\zeta \in \overline{S^{(m)}}$ mit einem $k < 0$, ergibt sich für $\zeta = B(z)$ mit $z \in V$:

$$\begin{aligned}
|f_J(B(z))| \left(\sum_{l=1}^{n} |B_l(z)|^2 \right)^{\frac{|k|}{2}} &= |f_J(B(z))| \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{|z_l|^2}{|1 + z_n^{m_n}|^{\frac{2}{m_l}}} + \frac{2^{\frac{2}{m_n}} |z_n|^2}{|1 + z_n^{m_n}|^{\frac{2}{m_n}}} \right)^{\frac{|k|}{2}} \\
&\le \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}
\end{aligned}$$

Damit folgt die zweite Abschätzung. Wegen $z \in V$ gilt $|z_n| > 1 - \varepsilon$, und die erste Abschätzung ist ebenfalls bewiesen.

Aus der Gebietsungleichung $r^{(m)}(z) \le 0$ folgt für $l \neq n$

$$|z_l|^{2m_l} \le 1 - |z_n|^{2m_n} = (1 - |z_n^{m_n}|)\,(1 + |z_n^{m_n}|) \le 2|1 + z_n^{m_n}|.$$

Das beweist die dritte Aussage. □

Bemerkung 2.4.2
Der Hilfssatz 2.4.1 wird benutzt, um den Term $|f_K(B(z))| \, |z_{(K \setminus J')}|$ aus den Abschätzungen der Koeffizientenfunktionen F_J mit $j_q = n$ (der zurückgezogenen Formen $F := B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$) zu eliminieren. Es ist zu beachten, daß $(K \setminus J')$ eine einelementige Menge ist und ihr eines Element von n verschieden ist.

Der Term $|f_J(B(z))|\,|z_l|$ mit $l \neq n$ (und $|J| = q$, $j_q \neq n$) kann mit Hilfssatz 2.4.1 für $z \in V$ auf unterschiedliche Weisen abgeschätzt werden, wobei die auftretenden Konstanten immer unabhängig von f sind.

(a) Es werden nur die Abschätzungen (i) und (iii) aus Hilfssatz 2.4.1 benutzt.

$$|f_J(B(z))|\,|z_l| \leq C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\,|1 + z_n^{m_n}|^{\frac{1}{2m_l}+\frac{|k|}{m_n}}$$

(b) Für $|k| \leq 1$ wird auf $|f_J(B(z))|\,|z_l|^{|k|}$ Hilfssatz 2.4.1 (ii) und auf $|z_l|^{1-|k|}$ Hilfssatz 2.4.1 (iii) angewendet.

$$|f_J(B(z))|\,|z_l| = \left(|f_J(B(z))|\,|z_l|^{|k|}\right)|z_l|^{1-|k|} \leq C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\,|1 + z_n^{m_n}|^{\frac{1+|k|}{2m_l}}$$

(c) Für $|k| \geq 1$ wird auf den Term $|f_J(B(z))|^{\frac{1}{|k|}}|z_l|$ Hilfssatz 2.4.1 (ii) und auf den Term $|f_J(B(z))|^{1-\frac{1}{|k|}}$ Hilfssatz 2.4.1 (i) angewendet.

$$\begin{aligned} |f_J(B(z))|\,|z_l| &= \left(|f_J(B(z))|\,|z_l|^{|k|}\right)^{\frac{1}{|k|}}|f_J(B(z))|^{\frac{|k|-1}{|k|}} \\ &\leq \widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\,|1 + z_n^{m_n}|^{\frac{1}{m_l}+\frac{|k|-1}{m_n}} \end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen aus der obigen Bemerkung (für $l = (K \setminus J')$) können die Koeffizientenfunktionen F_J auf V gegen $|1+z_n^{m_n}|^{-1}$ abgeschätzt werden. Durch Berechnen des maximalen Exponenten von $|1+z_n^{m_n}|^{-1}$ ergibt sich nun die Behauptung (a) auf Seite 28.

Satz 2.4.3
Sei $1 \leq q \leq n$ und $k < 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ und eine nur von k abhängige Konstante $\widehat{C}_k > 0$, so daß für alle $F := B^*f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ und $k < 0$ und für alle $z \in V$ gilt:

$$|F(z)| \;\leq\; C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|}\right)^{\alpha(k,m,q)} \qquad \textit{mit}$$

$$\alpha(k,m,q) \;=\; 1 + \sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l} + \begin{cases} \frac{1-|k|}{m_n} & \textit{für} \quad (\, m_n \leq 2m_q \,) \\ \frac{1-|k|}{2m_q} & \textit{für} \quad (\, m_n \geq 2m_q \textit{ und } |k| \leq 1 \,) \\ \frac{1-|k|}{m_n} & \textit{für} \quad (\, m_n \geq 2m_q \textit{ und } |k| \geq 1 \,) \end{cases}$$

Beweis:
Die Darstellung von F im Fall $(2 \leq q \leq n-1)$ umfaßt die Darstellung der zurückgezogenen Form F im Fall $q = 1$. Also werden beide Fälle zusammen behandelt.

Es sei $z \in V$. Durch eine genaue Fallunterscheidung wird nun der größte Exponent von $|1+z_n^{m_n}|^{-1}$ bestimmt, der für ein J mit $|J| = q < n$ auftreten kann.

Mit Hilfssatz 2.4.1 (i) gilt für $j_q < n$:

$$|F_J(z)| \leq C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|}\right)^{-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{m_{j_l}}}$$

Für $|J| = q < n$ mit $j_q = n$ wird der Term $|f_K(B(z))|\,|z_{(K\setminus J')}|$ mit den Abschätzungen aus Bemerkung 2.4.2 eliminiert:

$$\begin{aligned} |F_J(z)| \;\leq\; & C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_n}-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_{j_l}}} \\ & + C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \sum_{\substack{|K|=q \\ K\setminus J'\in \complement J}} |\epsilon^K_{(J',K\setminus J')}| \left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|}\right)^{1+\mu(k,m,J,K)+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_{j_l}}} \end{aligned}$$

$$\mu(k,m,J,K) := \frac{1}{m_{(K\setminus J')}} + \begin{cases} -\frac{|k|}{m_n} - \frac{1}{2m_{(K\setminus J')}} & \text{für } \ (\ m_n \leq 2m_{(K\setminus J')}\ ) \\ -\frac{|k|}{2m_{(K\setminus J')}} - \frac{1}{2m_{(K\setminus J')}} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_{(K\setminus J')} \text{ und } |k| \leq 1\ ) \\ -\frac{|k|}{m_n} - \frac{1}{m_{(K\setminus J')}} + \frac{1}{m_n} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_{(K\setminus J')} \text{ und } |k| \geq 1\ ) \end{cases}$$

Um eine Abschätzung für F zu gewinnen, wird nun der maximale Exponent für beliebiges J bestimmt. Dabei wird ausgenutzt, daß $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{n-1}$ vorausgesetzt wurde.

$$\begin{aligned} \alpha_1(k,m,q) &:= \max_{|J|=q,\,j_q\neq n}\left\{-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{m_{j_l}}\right\} = -\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q}\frac{1}{m_l} \\ \alpha_2(k,m,q) &:= \max_{\substack{|J'|=q-1 \\ j_{q-1}\neq n}}\left\{1+\frac{1}{m_n}-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_{j_l}}\right\} = 1+\frac{1}{m_n}-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l} \\ \alpha_3(k,m,q) &:= \max_{\substack{|J'|=q-1,\,j_{q-1}\neq n \\ i\neq n,\,i\in\complement J'}}\left\{1+\vartheta(k,m,i)+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_{j_l}}\right\} = 1+\eta(k,m,q)+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l} \end{aligned}$$

$$\vartheta(k,m,i) := \begin{cases} -\frac{|k|}{m_n}+\frac{1}{2m_i} & \text{für } \ (\ m_n \leq 2m_i\ ) \\ -\frac{|k|}{2m_i}+\frac{1}{2m_i} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_i \text{ und } |k| \leq 1\ ) \\ -\frac{|k|}{m_n}+\frac{1}{m_n} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_i \text{ und } |k| \geq 1\ ) \end{cases}$$

$$\eta(k,m,q) := \begin{cases} -\frac{|k|}{m_n}+\frac{1}{2m_q} & \text{für } \ (\ m_n \leq 2m_q\ ) \\ -\frac{|k|}{2m_q}+\frac{1}{2m_q} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \leq 1\ ) \\ -\frac{|k|}{m_n}+\frac{1}{m_n} & \text{für } \ (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \geq 1\ ) \end{cases}$$

Somit genügt die Form F auf V der Abschätzung

$$|F(z)| \leq C\,\widehat{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\left(\frac{1}{|1+z_n^{m_n}|}\right)^{\alpha(k,m,q)} \qquad \text{mit}$$

$$\alpha(k,m,q) := \max_{i=1,2,3}\{\alpha_i(k,m,q)\}.$$

Offenbar ist $\alpha_2(k,m,q) > \alpha_1(k,m,q)$.

$$\begin{aligned}
\alpha(k,m,q) &= 1+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l}+\max\left\{\frac{1}{m_n}-\frac{|k|}{m_n},\ \eta(k,m,q)\right\}\\
&= 1+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l}+\begin{cases}\frac{1-|k|}{m_n} & \text{für} \quad (\ m_n \leq 2m_q\ )\\ \frac{1-|k|}{2m_q} & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \leq 1\ )\\ \frac{1-|k|}{m_n} & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \geq 1\ )\end{cases}
\end{aligned}$$

Im Fall $q=n$ kann man direkt ablesen, daß

$$\alpha(k,m,n) = 1-\frac{|k|}{m_n}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l} = 1+\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{m_l}+\frac{1-|k|}{m_n}$$

gilt. Also wird dieser Fall durch das obige $\alpha(k,m,q)$ für $q=n$ auch erfaßt. □

Aus Satz 2.3.3 und Satz 2.4.3 ergibt sich nun die auf Seite 29 angekündigte Abschätzung (d) von F gegen $\delta(z)$.

Satz 2.4.4 (Abschätzung der Formen $F = B^*f$)
Seien $k<0$, $1 \leq q \leq n$, und sei $\alpha = \alpha(k,m,q)$ wie in Satz 2.4.3 definiert. Dann gibt es eine nur von k abhängige Konstante $\widetilde{C}_k > 0$, so daß für alle $F := B^*f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$, $k<0$, und alle $z \in \overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ gilt:

$$|F(z)| \;\leq\; \widetilde{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\,(\delta(z))^{-\gamma(k,m,q)} \qquad \textit{mit}$$

$$\gamma(k,m,q) = \begin{cases} 2m_{n-1}\alpha(k,m,q) & \textit{für} \quad -1-m_n\left(1+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l}\right) \leq k < 0\\ 0 & \textit{für} \quad k < -1-m_n\left(1+\sum_{l=1}^{q-1}\frac{1}{m_l}\right)\end{cases}$$

Beweis:
Aus Satz 2.3.3 und Satz 2.4.3 folgt die Abschätzung auf V, wobei

$$\gamma(k,m,q) = \begin{cases} 2m_{n-1}\alpha(k,m,q) & \text{für} \quad \alpha(k,m,q) \geq 0\\ 0 & \text{für} \quad \alpha(k,m,q) < 0\end{cases}$$

ist. Auf $\overline{D^{(m)}} \setminus V$ gilt nach Folgerung 2.3.4 $|F(z)| \leq C \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$. Außerdem ist $\varepsilon \leq \delta(z) \leq \widetilde{C}$ für alle $z \in \overline{D^{(m)}} \setminus V$. Daraus folgt auf $\overline{D^{(m)}} \setminus V$ für $\alpha(k,m,q) \geq 0$:

$$|F(z)| \leq C \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left(\widetilde{C} \, (\delta(z))^{-1} \right)^{2m_{n-1}\alpha(k,m,q)}$$

Aus den Bedingungen an $\alpha(k,m,q)$ müssen jetzt noch die entsprechenden Bedingungen an k berechnet werden. Für $|k| < 1$ gilt immer $\alpha(k,m,q) \geq 1$. Also ist die Bedingung $\alpha(k,m,q) < 0$ ist äquivalent zu:

$$0 > 1 + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_l} + \frac{1-|k|}{m_n} \quad \Longleftrightarrow \quad k < -1 - m_n \left(1 + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_l} \right)$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 2.4.5

Aus Satz 2.3.3 und Satz 2.4.3 folgt im Beweis von Satz 2.4.4 sogar, daß $F = B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ für $\alpha(k,m,q) < 0$ auf $\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ die Abschätzung

$$|F(z)| \leq \widetilde{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, (\delta(z))^{-\alpha(k,m,q)}$$

erfüllt. Diese besagt, daß F für $z \to z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ wie $\|z - z^{(\lambda)}\|^{|\alpha(k,m,q)|}$ gegen Null strebt, und sich somit mit Wert Null auf $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ stetig fortsetzt. Das Verschwinden einer Form F in endlich vielen ausgezeichneten Randpunkten hat aber keinen Einfluß auf die Abschätzungen des in dieser Arbeit benutzten Integral-Lösungsoperators, d. h. eine solche Form F erfüllt die gleichen Abschätzungen wie eine beliebige glatte auf $D^{(m)}$ beschränkte Form. Daher wurde im Beweis von Satz 2.4.4 für $\alpha(k,m,q) < 0$ der Koeffizient $\gamma(k,m,q) = 0$ gesetzt.

Satz 2.4.6 (Integrabilitätsbedingung)

Sei $F \in \mathcal{C}^\infty(D^{(m)})$ mit $|F(z)| \leq C \, (\delta(z))^{-\gamma}$ und $0 \leq \gamma < 2n$. Dann ist $F \in \mathcal{L}^1(D^{(m)})$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|F\|_{\mathcal{L}^1(D^{(m)})} = \int\limits_{D^{(m)}} |F(\zeta)| \, dV(\zeta) \;&\leq\; C \int\limits_{D^{(m)} \setminus V} \delta(\zeta)^{-\gamma} \, dV(\zeta) \;+\; C \int\limits_{V} \delta(\zeta)^{-\gamma} \, dV(\zeta) \\
&\leq\; C_1 + C \sum_{j=0}^{m_n - 1} \int\limits_{B(z^{(\lambda)},\varepsilon)} \|\zeta - z^{(\lambda)}\|^{-\gamma} \, dV(\zeta) \\
&\leq\; C_1 + \widetilde{C} \int_0^{\varepsilon} \rho^{2n-1-\gamma} \, d\rho \leq C_2
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Damit ist die Aussage (e) auf Seite 29 gezeigt. Jetzt wird die Behauptung (b) auf Seite 29 bewiesen, indem in den Abschätzungen der Koeffizientenfunktionen von $u := b^*U$ mit Satz 2.1.3 die $|\zeta_{(K\setminus J')}|$-Terme eliminiert werden.

Satz 2.4.7 (Abschätzung der Formen $u = b^*U$)

(i) Sei $2 \leq q \leq n$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $u := b^*U$ mit $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$, alle $\mu \in [0,1]$ und alle $\zeta \in S^{(m)}$ gilt:

$$|u(\zeta)| \leq C\,|U(b(\zeta))| \left(\left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{\widetilde{\alpha}_1(m,q)} + \|\zeta\|^\mu \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)} \right)$$

$$\textit{mit} \quad \widetilde{\alpha}_1(m,q) := \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{n-l}} \quad \textit{und} \quad \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu) := \frac{1}{m_n} + \frac{(1+\mu)}{2m_{n-q+1}} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}}$$

(ii) Sei $1 \leq q \leq n$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $u := b^*U$ mit $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ und alle $\zeta \in S^{(m)}$ gilt:

$$|u(\zeta)| \leq C\,|U(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{\widetilde{\alpha}(m,q)} \quad \textit{mit}$$

$$\widetilde{\alpha}(m,q) := \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} + \begin{cases} 0 & \textit{für}\ (\ q = 1\ ) \\ \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2m_{n-q+1}} & \textit{für}\ (\ q \geq 2\ \textit{und}\ m_n \geq 2m_{n-q+1}\ ) \\ \frac{1}{m_{n-q+1}} & \textit{für}\ (\ q \geq 2\ \textit{und}\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \textit{für}\ (\ q = 1\ ) \\ \widetilde{\alpha}_2(m,q,0) & \textit{für}\ (\ q \geq 2\ \textit{und}\ m_n \geq 2m_{n-q+1}\ ) \\ \widetilde{\alpha}_1(m,q) & \textit{für}\ (\ q \geq 2\ \textit{und}\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

Dabei bedeutet $|U(b(\zeta))| = \sum_{|J|=q-1} |U_J(b(\zeta))|$.

Beweis:

Zunächst wird (i) bewiesen. Die Abschätzungen der u_J in Abschnitt 2.2 für $q-1 = 1$ lassen sich genauso darstellen wie die Abschätzungen für $(q-1) \in \{2,\dots,n-1\}$. Damit können beide Fälle zusammen behandelt werden.

Für $j_{q-1} \neq n$ wurde bereits ausgerechnet, daß auf $S^{(m)}$ gilt:

$$|u_J(\zeta)| \leq C\,|U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i - \zeta_n^{m_n}|} \right)^{\sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{j_l}}}$$

Für $j_{q-1} = n$ wird $u_J(\zeta)$ zunächst auf $S^{(m)} \setminus P(0,2)$ mit Satz 2.1.3 (i) und (ii) abgeschätzt. Insbesondere wird ausgenutzt, daß für $\mu \in [0,1]$ alle $\zeta \in S^{(m)} \setminus P(0,2)$ die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|\zeta_j| \leq \|\zeta\|^{\mu}\,|\zeta_j|^{(1-\mu)} \lesssim \|\zeta\|^{\mu}\,|\zeta_n|^{\frac{m_n(1-\mu)}{2m_j}}$$

$$\begin{aligned}
|u_J(\zeta)| \;\leq\;& C\,|U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}} + C \sum_{\substack{|K|=q-1\\ K\setminus J'\in \complement J}} |U_K(b(\zeta))| \\
& |\epsilon^K_{(J',K\setminus J')}|\,|\zeta_n^{m_n-1}|\,|\zeta_{(K\setminus J')}| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_{(K\setminus J')}}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}} \\
\leq\;& C\,|U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}} + C \sum_{\substack{|K|=q-1\\ K\setminus J'\in \complement J}} |U_K(b(\zeta))| \\
& |\epsilon^K_{(J',K\setminus J')}|\,|\zeta_n^{m_n}|^{1-\frac{1}{m_n}}\,|\zeta_n^{m_n}|^{\frac{(1-\mu)}{2m_{(K\setminus J')}}}\,\|\zeta\|^{\mu} \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_{(K\setminus J')}}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}} \\
\leq\;& C\,|U_J(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{1+\frac{1}{m_n}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}} + C \sum_{\substack{|K|=q-1\\ K\setminus J'\in \complement J}} |U_K(b(\zeta))| \\
& |\epsilon^K_{(J',K\setminus J')}|\,\|\zeta\|^{\mu} \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{\frac{1}{m_n}+\frac{(1+\mu)}{2m_{(K\setminus J')}}+\sum_{l=1}^{q-2}\frac{1}{m_{j_l}}}
\end{aligned}$$

Nun müssen die minimalen auftretenden Exponenten für beliebiges J bestimmt werden. Dabei wird wieder ausgenutzt, daß $m_1 \leq \ldots \leq m_{n-1}$ ist. Die zu betrachtenden Exponenten sind:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_1(m,q) &:= \min_{|J|=q-1,\, j_{q-1}\neq n} \left\{ \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{j_l}} \right\} = \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{n-l}} \\
\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu) &:= \min_{\substack{|J'|=q-2,\, j_{q-2}\neq n\\ i\neq n,\, i\in \complement J'}} \left\{ \frac{1}{m_n} + \frac{(1+\mu)}{2m_i} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{j_l}} \right\} \\
&= \frac{1}{m_n} + \frac{(1+\mu)}{2m_{n-(q-1)}} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} \qquad \text{für } \mu \in [0,1] \\
\widetilde{\alpha}_3(m,q) &:= \min_{\substack{|J'|=q-2\\ j_{q-2}\neq n}} \left\{ 1 + \frac{1}{m_n} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{j_l}} \right\} = 1 + \frac{1}{m_n} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\widetilde{\alpha}_3(m,q) > \widetilde{\alpha}_1(m,q)$. Damit gilt die folgende Abschätzung:

$$|u(\zeta)| \quad \leq \quad C\,|U(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{\widetilde{\alpha}_1(m,q)} + C\,|U(b(\zeta))|\,\|\zeta\|^{\mu} \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)}$$

Auf $S^{(m)} \cap P(0,2)$ gilt wegen $1 \leq |2i-\zeta_n^{m_n}| \leq 2+2^{m_n}$ und $|u(\zeta)| \leq C\,|U(b(\zeta))|$ mit einer von U unabhängigen Konstanten $C>0$ die Abschätzung ebenfalls. Damit ist (i) bewiesen.

Um (ii) für $q \geq 2$ zu beweisen, wird in (i) $\mu = 0$ gewählt. Dann liegen Abschätzungen von u gegen $|2i-\zeta_n^{m_n}|^{-1}$ vor, und es muß nur noch der minimale auftretende Exponent bestimmt werden.

$$|u(\zeta)| \leq C\,|U(b(\zeta))| \left(\frac{1}{|2i-\zeta_n^{m_n}|}\right)^{\widetilde{\alpha}(m,q)} \qquad \text{mit}$$

$$\widetilde{\alpha}(m,q) := \min\left\{\widetilde{\alpha}_1(m,q), \widetilde{\alpha}_2(m,q,0)\right\}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(m,q) \quad &= \quad \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} + \min\left\{\frac{1}{m_{n-q+1}}, \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2m_{n-q+1}}\right\} \\
&= \quad \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} + \begin{cases} \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2m_{n-(q-1)}} & \text{für} \quad m_n \geq 2m_{n-q+1} \\ \frac{1}{m_{n-(q-1)}} & \text{für} \quad m_n \leq 2m_{n-q+1} \end{cases} \\
&= \quad \begin{cases} \widetilde{\alpha}_2(m,q,0) & \text{für} \quad m_n \geq 2m_{n-q+1} \\ \widetilde{\alpha}_1(m,q) & \text{für} \quad m_n \leq 2m_{n-q+1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $q \geq 2$ ist Abschätzung (ii) damit bewiesen. Für $q = 1$ gilt $|u(\zeta)| = |U(b(\zeta))|$. □

Bemerkung 2.4.8

Es ist zu beachten, daß die Exponenten von $|2i-\zeta_n^{m_n}|^{-1}$ in den Abschätzungen der $(0,q-1)$-Form $u := b^*U$ im vorigen Satz formal von q (und nicht von $(q-1)$) abhängen, d. h. die Exponenten werden für $u := b^*U \in \mathcal{C}^{\infty}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ mit $\widetilde{\alpha}(m,q)$, $\widetilde{\alpha}_1(m,q)$ und $\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)$ bezeichnet.

Die Aussage (ii) des vorigen Satzes genügt, um so Abschätzungen von Lösungen des Problems $\overline{\partial}u = f$ für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $\gamma(k,m,q) < 2n$ zu erhalten, wie es auf den Seiten 28 bis 30 beschrieben wurde. Mit der Aussage (i) können in einigen Fällen verbesserte Abschätzungen gewonnen werden.

3 Allgemeine Lösungstheorie der $\overline{\partial}$-Gleichung auf beschränkten glatt berandeten Gebieten im $\mathbb{C}^n$

In diesem Kapitel wird eine kurze Zusammenfassung der Theorie der Lösung der Gleichung $\overline{\partial}u = f$ mittels Integralformeln auf beschränkten glatt berandeten Gebieten D im $\mathbb{C}^n$ gegeben, soweit sie in dieser Arbeit benötigt wird. Die Definitionen und Sätze sind im wesentlichen dem Buch „Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables“ von R. M. Range ([Ra2]) entnommen worden und werden deshalb ohne Beweis angegeben.

Definition 3.1.1 (Doppelformen)
Seien $M \subset \mathbb{C}^m$ ein Gebiet mit $\mathcal{C}^k$-Rand und $N \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit $\mathcal{C}^l$-Rand. Dann bezeichnet $\mathcal{C}^{k,l}(M \times N)$ den Raum aller Funktionen aus $\mathcal{C}^0(M \times N)$, die in der ersten Variablen k-fach stetig differenzierbar und in der zweiten Variablen l-fach stetig differenzierbar sind. $\mathcal{C}^{k,l}_{(p,q),(r,s)}(M \times N)$ ist der Raum aller Formen mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^{k,l}(M \times N)$, die vom Typ (p,q) in $\zeta \in M$ und vom Typ (r,s) in $z \in N$ sind. (Dabei gilt die Konvention, daß ζ_j-Differentiale mit z_i-Differentialen vertauschen.) Formen in $\mathcal{C}^{k,l}_{(p,q),(r,s)}(M \times N)$ werden als Doppelformen *(oder* Doppeldifferentialformen*) bezeichnet.*

Bei der Integration über eine Doppelform ω mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^{k,l}(M \times N)$ wird *immer über die erste Variable integriert*, sofern nichts anderes vereinbart wird. Es gilt also für $U \subset M$, falls das Integral der Doppelform ω über U existiert:

$$\int\limits_U \omega := \int\limits_U \omega(\cdot, z)$$

Von jetzt an sei D in diesem Kapitel immer ein *beschränktes, glatt berandetes Gebiet im* $\mathbb{C}^n$. Die Variablen auf $bD \times D$ und $\overline{D} \times D$ werden mit (ζ, z) bezeichnet.

Definition 3.1.2 (Erzeugende Form)
Eine Form $W \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$, $W(\zeta,z) = \sum_{j=1}^n W_j(\zeta,z)\, d\zeta_j$, heißt erzeugende Form *(auf bD) für das Gebiet D, wenn gilt:*

$$< W(\zeta,z), \zeta - z > := \sum_{j=1}^n W_j(\zeta,z)(\zeta_j - z_j) = 1 \quad \textit{für alle } (\zeta,z) \in bD \times D$$

Definition 3.1.3 (Homotopieform)
Für $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^n$ seien:

$$\beta := \|\zeta - z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^2$$

$$B := \frac{\partial_\zeta \beta}{\beta} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)}{\|\zeta - z\|^2} d\zeta_j$$

Dann ist $B \in \mathcal{C}^{\infty,\infty}_{(1,0),(0,0)}((bD \times \overline{D}) \setminus \Delta bD)$ eine erzeugende Form für jedes glatt berandete Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^n$. Ist $[0,1]$ das Einheitsintervall und $W \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$ eine andere erzeugende Form für ein glatt berandetes Gebiet $D \subset\subset \mathbb{C}^n$, so heißt

$$\widehat{W}(\zeta, \lambda, z) := \lambda W(\zeta, z) + (1 - \lambda) B(\zeta, z) \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}((bD \times [0,1]) \times D)$$

die zu W gehörige Homotopieform *(für das Gebiet D).*

Definition 3.1.4 (Cauchy-Fantappiè-Kerne)
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet, $W \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$ eine erzeugende Form für D und $\widehat{W}$ die zu W gehörige Homotopieform. Dann heißen

$$\Omega_q(W) := \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \binom{n-1}{q} W \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,\lambda} W)^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z W)^q$$

$$\Omega_q(\widehat{W}) := \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \binom{n-1}{q} \widehat{W} \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,\lambda} \widehat{W})^{n-q-1} \wedge (\overline{\partial}_z \widehat{W})^q$$

für $0 \leq q \leq n-1$ und $\Omega_n(\cdot) = \Omega_{-1}(\cdot) := 0$ der von W bzw. $\widehat{W}$ erzeugte Cauchy-Fantappiè-Kern der Ordnung q. *$K_q(\zeta, z) := \Omega_q(B)(\zeta, z)$ ist der* Bochner-Martinelli-Koppelman-Kern (BMK-Kern). *(Dabei ist $\overline{\partial}_{\zeta,\lambda} := \overline{\partial}_\zeta + d_\lambda$, und die r-te Potenz einer Differentialform bezeichnet stets das r-fache äußere Produkt der Differentialform.)*

Bemerkung 3.1.5
$\Omega_q(\widehat{W})$ ist eine Doppelform auf $(bD \times [0,1]) \times D$ vom Grad $2n - q - 1$ in (ζ, λ) und vom Typ $(0, q)$ in z. Für eine definierende Form W, die holomorph bzgl. z ist, gilt $\Omega_q(W) = 0$ für alle $q \geq 1$.

Satz 3.1.6 (Bochner-Martinelli-Koppelman Formel)
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und $0 \leq q \leq n$. Dann wird jedes $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D})$ auf D dargestellt durch

$$f(z) = \int_{bD} f \wedge K_q(\cdot, z) - \int_D \overline{\partial} f \wedge K_q(\cdot, z) - \overline{\partial}_z \int_D f \wedge K_{q-1}(\cdot, z),$$

wobei $\int_D f \wedge K_{q-1}(\cdot, z) \in \mathcal{C}^1_{(0,q-1)}(D)$ ist.

Beweis:
Vergleiche [Ra2] Seite 154, Kapitel IV, Theorem 1.10. □

Satz 3.1.7 (Allgemeine Darstellungsformel mit Cauchy-Fantappiè Kern)
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand, $W \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$ eine erzeugende Form für D und $\widehat{W}$ die zu W gehörige Homotopie-Form auf $(bD \times [0,1]) \times D$. Für $1 \leq q \leq n$ seien lineare Operatoren $T^W_q : \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D}) \to \mathcal{C}^0_{(0,q-1)}(D)$ definiert durch

$$T^W_q f := \int\limits_{bD\times[0,1]} f \wedge \Omega_{q-1}(\widehat{W}) - \int\limits_D f \wedge K_{q-1}.$$

Weiter seien $T^W_0 = T^W_{n+1} \equiv 0$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Für $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ gilt: Für $f \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^k_{(0,q)}(D)$ ist $T^W_q f \in \mathcal{C}^k_{(0,q-1)}(D)$.

(ii) Für $0 \leq q \leq n$ gilt: Wenn $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D})$ ist, dann gilt auf D die Formel

$$f = \int\limits_{bD} f \wedge \Omega_q(W) + \overline{\partial} T^W_q f + T^W_{q+1} \overline{\partial} f.$$

Beweis:
Vergleiche [Ra2], Seite 174, Kapitel IV, Theorem 3.6. □

Bemerkung 3.1.8

(a) Wird $W := B$ gesetzt, so gilt $\widehat{W} = B$, die Integrale über $bD \times [0,1]$ verschwinden, und in der Darstellung (ii) im vorigen Satz ergibt sich gerade die Integraldarstellung aus der Bochner-Martinelli-Koppelman Formel in Satz 3.1.6.

(b) Für $q = n$ gilt nach Definition $\Omega_n(W) \equiv 0$, und $f \wedge \Omega_{n-1}(\widehat{W})$ ist eine (n,n)-Form in ζ. Daher gilt $\int_{bD\times[0,1]} f \wedge \Omega_{n-1}(\widehat{W}) \equiv 0$. Die Integraldarstellung im Satz 3.1.7 (ii) vereinfacht sich also zu $f(z) = -\,\overline{\partial}_z \int_D f \wedge K_{n-1}(\cdot, z)$. Das bedeutet, daß für $(0,n)$-Formen $f \in \mathcal{C}^1_{(0,n)}(\overline{D})$ die Geometrie des Gebietes nicht in die Integraldarstellung eingeht. Insbesondere ist $T_n := T^W_n$ ein besonders einfacher Lösungsoperator der Gleichung $\overline{\partial} u = f$ für $f \in \mathcal{C}^1_{(0,n)}(\overline{D})$, der nur aus einem Gebietsintegral mit dem BMK-Kern besteht. Dieser Operator ergibt sich natürlich genauso aus der BMK-Formel im Fall $q = n$.

Für $1 \leq q \leq n-1$ wird der Integraloperator nun weiter umgeformt. Durch Spezialisierung im Satz 3.1.7 auf den Fall $\Omega_q(W) \equiv 0$ ergibt sich eine einfachere Formel, die durch Integration über die Variable λ noch weiter umgeformt werden kann.

Folgerung 3.1.9 (Integraldarstellung für $\Omega_q(W) = 0$)
Seien D, W und $\widehat{W}$ wie in Satz 3.1.7, und es gelte zusätzlich $\Omega_q(W) \equiv 0$ für ein $q \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D})$ auf D die Formel

$$f = \overline{\partial} T_q^W f + T_{q+1}^W \overline{\partial} f.$$

Für $k = 1, 2, \dots \infty$ und $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^k_{(0,q)}(D)$ ist $T_q^W f \in \mathcal{C}^k_{(0,q-1)}(D)$. Ist $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D}) \cap ker(\overline{\partial})$, so gilt insbesondere $\overline{\partial} T_q^W f = f$ auf D. □

Von jetzt an sei $W \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$ eine erzeugende Form der Gestalt

$$W(\zeta, z) = \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta, z)\, d\zeta_j =: \frac{w(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)},$$

wobei die Funktion Φ auf $bD \times \overline{D}$ definiert ist und nur auf der Randdiagonale $\Delta bD := \{(\zeta, z) \in bD \times bD : \zeta = z\}$ verschwindet.

Hilfssatz 3.1.10 (Integration über die Variable λ)
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $0 \leq q \leq n-2$ und $f \in \mathcal{C}^0_{(0,q+1)}(bD)$. Dann gilt

$$\int_{bD \times [0,1]} f \wedge \Omega_q(\widehat{W}) = \int_{bD} f \wedge A_q(W, B),$$

wobei die $A_q(W, B)$ die folgende Doppelform ist:

$$A_q(W, B) := \sum_{j=0}^{n-q-2} \sum_{l=0}^{q} a_q^{j,l}\, A_q^{j,l}(W, B)$$

mit numerischen Konstanten $a_q^{j,l}$ und

$$\begin{aligned} A_q^{j,l}(W, B) &:= W \wedge B \wedge (\overline{\partial}_\zeta W)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta B)^{n-q-2-j} \wedge (\overline{\partial}_z W)^l \wedge (\overline{\partial}_z B)^{q-l} \\ &= \frac{w \wedge \partial_\zeta \beta \wedge (\overline{\partial}_\zeta w)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-2-j} \wedge (\overline{\partial}_z w)^l \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-l}}{\Phi^{j+l+1}\, \beta^{n-(j+l+1)}} \\ &= \frac{A_q^{j,l}(w, \partial_\zeta \beta)}{\Phi^{j+l+1}\, \beta^{n-(j+l+1)}} \end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis erfolgt durch Integration über die Variable λ, vgl. [Ra2], Seite 206, Kapitel V, Lemma 3.2. □

Ist die erzeugende Form W holomorph in z, so gilt $(\overline{\partial}_z W)^l = 0$ für alle $l \neq 0$. Es wird jetzt $a_q^j := a_q^{j,0}$ und $A_q^j(w, \partial_\zeta \beta) := A_q^{j,0}(w, \partial_\zeta \beta)$ gesetzt. Weiter kann in der Definition von $A_q^j(w, \partial_\zeta \beta)$ die Form $\overline{\partial}_\zeta w$ durch ihren zum Rand tangentialen Anteil $\overline{\partial}_{\zeta,T} w$ ersetzt werden, denn $A_q^j(w, \partial_\zeta \beta)$ ist bereits in den $d\zeta_j$ gesättigt, und es handelt sich um ein Randintegral. Damit ergibt sich aus Folgerung 3.1.9 und Hilfssatz 3.1.10 folgende Aussage.

Satz 3.1.11 (Integral-Lösungsoperator mit $\overline{\partial}_z W \equiv 0$)
Sei $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand, $1 \leq q \leq n$, $W = \frac{w}{\Phi} \in \mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD \times D)$ eine erzeugende Form, die holomorph bzgl. z ist, und $\widehat{W} = \lambda W + (1-\lambda) B$ die zu W gehörige Homotopieform. Dann ist für $f \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D})$

$$
\begin{aligned}
T_q^W f &= \sum_{j=0}^{n-q-1} a_{q-1}^j \int\limits_{bD} f \wedge \frac{\widetilde{A}_{q-1}^j(w, \partial_\zeta \beta)}{\Phi^{j+1}\, \beta^{n-(j+1)}} - \int\limits_{D} f \wedge K_{q-1} \\
&=: \sum_{j=0}^{n-q-1} a_{q-1}^j \, I_{q,j}^W f - J_q^W f
\end{aligned}
$$

$$\text{mit} \quad \widetilde{A}_{q-1}^j(w, \partial_\zeta \beta) := w \wedge \partial_\zeta \beta \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} w)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1},$$

und es gelten folgende Aussagen:

(i) Für $k = 0, 1, 2 \ldots, \infty$ und $f \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^k_{(0,q)}(D)$ ist $T_q^W f \in \mathcal{C}^k_{(0,q-1)}(D)$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D}) \cap ker(\overline{\partial})$, dann gilt auf D die Formel $\overline{\partial} T_q^W f = f$.

(Dabei bezeichnet $\overline{\partial}_{\zeta,T} w$ den bD-tangentialen Anteil von $\overline{\partial}_\zeta w$.) □

Die Gleichung $\overline{\partial} u = f$ kann also auf beschränkten, glatt berandeten Gebieten für Formen $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D}) \cap ker(\overline{\partial})$ gelöst werden. Um einen Lösungsoperator für Formen $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(D) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ zu erhalten, muß das Randintegral in ein Gebietsintegral umgewandelt werden. Dieses Vorgehen wird hier kurz skizziert und im fünften Kapitel für das komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ genauer ausgeführt.

Für $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D})$ können die Integralkerne im Satz 3.1.11 von $bD \times D$ geeignet auf $(\overline{D} \times \overline{D}) \setminus \Delta bD$ fortgesetzt werden. Dann wird im Satz 3.1.11 das Randintegral mit dem Satz von Stokes in ein Gebietsintegral umgewandelt. Der so erhaltene Satz kann nun für $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(D) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ auf geeignete glatt berandete Gebiete D_δ, die D von innen ausgeschöpfen, und auf $f\big|_{\overline{D_\delta}}$ angewendet werden. Die Fortsetzungen der Integralkerne von $bD_\delta \times D_\delta$ auf $(\overline{D_\delta} \times \overline{D_\delta}) \setminus \Delta bD_\delta$ hängen dabei allerdings von δ ab. Durch Grenzübergang für $\delta \to 0$ ergibt sich ein Integral-Lösungsoperator des $\overline{\partial}$-Problems für $f \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(D) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$.

4 Die Arbeit von Barletta und Parrini

In der Arbeit [BaPa] von Barletta und Parrini wird ein Sonderfall des in dieser Arbeit untersuchten $\overline{\partial}$-Problems betrachtet:

Gegeben sei $f \in \mathcal{F}^k_{(0,1)}(\overline{S^{(m)}})$ für ein $k < 0$. Die Behauptung in [BaPa] ist, daß die Gleichung $\overline{\partial}u = f$ für

$$|k| > 1 + m_n \left(1 - \frac{1}{\prod_{l=1}^n m_l}\right)$$

eine beschränkte Lösung $u \in \mathcal{C}^\infty(S^{(m)})$, also eine Lösung in $\mathcal{F}^0(S^{(m)})$, besitzt.

Der Beweis dieses Ergebnisses ist aber für $n \geq 3$ nicht in Ordnung, denn beim Abschätzen des Integralkerns des Lösungsoperator ist Barletta und Parrini ein Fehler unterlaufen. In diesem Kapitel werden der Fehler korrigiert und die Integrale im Hinblick auf Abschätzungen bzgl. $\delta(z)$ genauer untersucht. Da dies aber nicht zu brauchbaren Ergebnissen führt, werden die Konstruktion des Lösungsoperators und die möglichen Abschätzungen nur knapp skizziert und nicht detailliert bewiesen.

Barletta und Parrini übertragen das $\overline{\partial}$-Problem zunächst von dem Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ auf das komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$, wie es im zweiten Kapitel durchgeführt wurde. (Die zurückgezogenen $(0,1)$-Formen $F := B^*f$ werden in [BaPa] allerdings direkt gegen die Randfunktion $r^{(m)}$ abgeschätzt.) Dann wird das komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ als analytische Überlagerung der Einheitskugel $B^{(n)}$ im $\mathbb{C}^n$ aufgefaßt. Mittels der Überlagerungsabbildung wird mit einem Verfahren aus der Arbeit [DaHe] von Dautov und Henkin ein Integral-Lösungsoperator der Gleichung $\overline{\partial}U = F$ für das Gebiet $D^{(m)}$ konstruiert. Der Fehler tritt beim Abschätzen der Integralkerne auf. Barletta und Parrini haben nur die günstigsten auftretenden Kerne betrachtet. Werden dagegen alle auftretenden Kerne berücksichtigt, so ist der Beweis der Abschätzungen der Lösung in [BaPa] für $n \geq 3$ nicht richtig.

Auf die Konstruktion des Integral-Lösungsoperators mit Hilfe der Überlagerungsabbildung wird in den Abschnitten 4.1 und 4.2 eingegangen. In Abschnitt 4.3 wird schließlich kurz skizziert, wo der Fehler auftritt und warum es für $n \geq 3$, $q < n-1$, $0 \leq \gamma < 2n$ und $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$ mit $|F(z)| \leq C_F\, \delta(z)^{-\gamma}$ nicht gelingt, den auf $D^{(m)}$ konstruierten Lösungsoperator der Gleichung $\overline{\partial}U = F$ analog zu der Vorgehensweise in [DaHe] zu behandeln und bzgl. $\delta(z)$ abzuschätzen.

4.1 Das Gebiet $D^{(m)}$ als analytische Überlagerung der Einheitskugel

Zunächst soll kurz der Begriff der „analytischen Überlagerung“ eingeführt werden. Die Definitionen orientieren sich an dem Buch „Analytic Functions of Several Complex Variables“ von Gunning und Rossi (vgl. [GuRo], Seite 101 ff.).

Definition 4.1.1 (leichte Abbildung)
Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt leicht*, wenn $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ eine diskrete Punktmenge ist.*

Definition 4.1.2 (vernachlässigbare Menge)
Sei D ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$ und X eine abgeschlossene Teilmenge von D. X heißt vernachlässigbar*, wenn gilt:*

(i) X ist nirgends dicht in D.

(ii) Für jedes Gebiet $D' \subset D$ und für jede auf $D' \setminus X$ holomorphe Funktion f, die auf D' lokal beschränkt ist, existiert eine eindeutige holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf ganz D'.

Definition 4.1.3 (analytische Überlagerung)
Eine analytische Überlagerung *ist ein Tripel (X, π, U) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) X ist ein lokal kompakter Hausdorffraum.

(ii) U ist ein Gebiet im $\mathbb{C}^n$.

(iii) π ist eine eigentliche, leichte, stetige Abbildung von X auf U.

(iv) Es gibt eine vernachlässigbare Menge $A \subset U$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{N}$, so daß π eine λ-blättrige Überlagerungsabbildung von $X \setminus \pi^{-1}(A)$ auf $U \setminus A$ ist. (D. h. jedes $y \in U \setminus A$ besitzt eine wegweise zusammenhängende Umgebung $\widetilde{U}$, so daß gilt: (1) $\pi^{-1}(\widetilde{U})$ ist die disjunkte Vereinigung von λ nichtleeren Mengen V_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, \lambda$. (2) Für jedes $\mu = 1, 2, \ldots, \lambda$ ist $\pi|_{V_\mu} : V_\mu \to \widetilde{U}$ ein Homöomorphismus.) Die Zahl λ ist dadurch eindeutig bestimmt und heißt die Blätterzahl *der Überlagerung.*

(v) $X \setminus \pi^{-1}(A)$ ist dicht in X.

Definition 4.1.4 (Verzweigungsordnung)
Sei (X, π, U) eine analytische Überlagerung. Die Verzweigungsordnung $\operatorname{ord}(x)$ *eines Punktes $x \in X$ ist diejenige natürliche Zahl λ, für die gilt: x besitzt eine Umgebungsbasis von λ-blättrigen Überlagerungen. Punkte $x \in X$ mit* $\operatorname{ord}(x) = 1$ *werden als* unverzweigt *bezeichnet, und Punkte $x \in X$ mit* $\operatorname{ord}(x) > 1$ *heißen* Verzweigungspunkte. *Mit $V(\pi)$ werde die* Menge aller Verzweigungspunkte *bezeichnet.*

Bemerkung 4.1.5 (Blätterzahl)
Die Blätterzahl λ einer analytischen Überlagerung (X, π, U) erfüllt offenbar die Beziehung

$$\lambda = \sum_{x \in \pi^{-1}(y)} \operatorname{ord}(x) \quad \text{für alle } y \in U.$$

Satz 4.1.6 ($D^{(m)}$ als analytische Überlagerung von $B^{(n)}$)
Seien $D^{(m)}$ ein komplexes Pseudoellipsoid, $B^{(n)} := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|^2 < 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$, $\widetilde{M} := \prod_{j=1}^{n} m_j$ und $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\pi(z) := (z_1^{m_1}, \ldots, z_n^{m_n})$. Dann ist das Tripel $(D^{(m)}, \pi, B^{(n)})$ eine $\widetilde{M}$-blättrige analytische Überlagerung.

Beweis:
Es werden die Eigenschaften (i) bis (v) aus der Definition einer analytischen Überlagerung nachgeprüft. (i) und (ii) sind offenbar erfüllt.

(iii) Es muß nur nachgeprüft werden, daß π eigentlich ist. Es gilt $bD^{(m)} = \pi^{-1}(bB^{(n)})$. Sei nun $K \subset B^{(n)}$ kompakt. Dann ist $\pi^{-1}(K)$ (relativ) abgeschlossen in $D^{(m)}$. Entweder ist nun $\pi^{-1}(K)$ kompakt, oder $\overline{\pi^{-1}(K)} \cap bD^{(m)} \neq \emptyset$.

Falls $\overline{\pi^{-1}(K)} \cap bD^{(m)} \neq \emptyset$ gilt, gibt es eine Zusammenhangskomponente G von $\overline{\pi^{-1}(K)}$, die Randpunkte enthält. $\pi(G)$ ist auch zusammenhängend, und es gilt sowohl $\pi(G) \subset K \cup bB^{(n)}$ als auch $\pi(G) \cap bB^{(n)} \neq \emptyset$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\pi^{-1}(K)$ kompakt.

(iv) $A := \left\{z \in B^{(n)} : \exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } z_j = 0\right\} = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{z \in B^{(n)} : z_j = 0\right\}$

Als Vereinigung der Nullstellenmengen endlich vieler nicht verschwindender, holomorpher Funktionen ist A nirgends dicht. Wenn D' ein beliebiges Gebiet in $B^{(n)}$ und f eine beliebige auf $D' \setminus A$ holomorphe und auf D' lokal beschränkte Funktion ist, existiert nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine eindeutige holomorphe Fortsetzung von f auf D' (vgl. z. B. [Ra2], Seite 32 f.). Also ist A vernachlässigbar.

$$\pi^{-1}(A) := \big\{z \in D^{(m)} : \exists j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } z_j = 0\big\} = \bigcup_{j=1}^{n} \big\{z \in D^{(m)} : z_j = 0\big\}$$

Offenbar ist $V(\pi) = \pi^{-1}(A)$, und $\pi|_{D^{(m)} \setminus \pi^{-1}(A)} : D^{(m)} \setminus \pi^{-1}(A) \longrightarrow B^{(n)} \setminus A$ ist eine Überlagerungsabbildung mit der Blätterzahl $\widetilde{M} := \prod_{j=1}^{n} m_j$.

(v) $V(\pi) = \pi^{-1}(A)$ liegt nirgends dicht in $D^{(m)}$. Folglich ist $D^{(m)} \setminus \pi^{-1}(A)$ dicht in $D^{(m)}$. □

Bemerkung 4.1.7
Die Überlagerungsabbildung π bildet sogar $\overline{D^{(m)}}$ holomorph auf $\overline{B^{(n)}}$ ab.

4.2 Konstruktion des Integral-Lösungsoperators nach Dautov und Henkin

In diesem Abschnitt wird die Herleitung des Integral-Lösungsoperators in [BaPa] kurz skizziert. Barletta und Parrini benutzen die Tatsache, daß $D^{(m)}$ eine analytische Überlagerung der Einheitskugel ist, um den Lösungsoperator für streng konvexe Gebiete aus der Arbeit [DaHe] von Dautov und Henkin mit Hilfe der Überlagerungsabbildung von der Einheitskugel $B^{(n)}$ geeignet auf $D^{(m)}$ zu übertragen.

Für den Rest dieses Kapitels wird die Randfunktion $r^{(m)}$ des komplexen Pseudoellipsoids $D^{(m)}$ mit r bezeichnet. Die Randfunktion der Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$ heiße s.

$$B^{(n)} := \left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : s(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 - 1 < 0 \right\}$$

Es gilt $r = s \circ \pi$. Zunächst müssen einige Funktionen eingeführt werden.

$$\begin{aligned}
\Phi_{B^{(n)}}(\xi, v) &:= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s(\xi)}{\partial \xi_j}(\xi_j - v_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi}_j(\xi_j - v_j) \\
\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v) &:= \Phi_{B^{(n)}}(\xi, v) - s(\xi) \\
\Phi_{D^{(m)}}(\zeta, z) &:= \Phi_{B^{(n)}}(\pi(\zeta), \pi(z)) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi_j(\zeta)}\,(\pi_j(\zeta) - \pi_j(z)) \\
\widehat{\Phi}_{D^{(m)}}(\zeta, z) &:= \widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\pi(\zeta), \pi(z)) = \Phi_{D^{(m)}}(\zeta, z) - r(\zeta)
\end{aligned}$$

Die Funktionen sind alle in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$, und mit der Umformung

$$\pi_j(\zeta) - \pi_j(z) = \zeta_j^{m_j} - z_j^{m_j} = \left(\sum_{l=0}^{m_j-1} \left(z_j^l \zeta_j^{m_j-l-1} \right) \right) (\zeta_j - z_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, n \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{D^{(m)}}(\zeta, z) &= \sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \quad \text{mit} \\
w_j(\zeta, z) &:= \overline{\zeta}_j^{m_j} \left(\sum_{l=0}^{m_j-1} z_j^l \zeta_j^{m_j-l-1} \right).
\end{aligned}$$

Die Funktionen $w_1(\zeta, z), \dots, w_n(\zeta, z)$, $\Phi_{D^{(m)}}(\zeta, z)$ und $\widehat{\Phi}_{D^{(m)}}(\zeta, z)$ sind holomorph bezüglich der Variablen z. Ab jetzt wird zur Verkürzung der Schreibweise für den Rest dieses Kapitels $\Phi := \Phi_{D^{(m)}}$ und $\widehat{\Phi} := \widehat{\Phi}_{D^{(m)}}$ gesetzt. Die Doppelformen

$$\begin{aligned}
W(\zeta, z) &:= \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} w_j(\zeta, z)\, d\zeta_j =: \frac{w(\zeta, z)}{\Phi(\zeta, z)} \in \mathcal{C}^{\infty,\infty}_{(1,0),(0,0)}(bD^{(m)} \times D^{(m)}) \\
\widehat{W}(\zeta, z) &:= \lambda W(\zeta, z) + (1 - \lambda) B(\zeta, z) \in \mathcal{C}^{\infty,\infty}_{(1,0),(0,0)}((bD^{(m)} \times [0,1]) \times D^{(m)})
\end{aligned}$$

sind erzeugende Formen für $D^{(m)}$. Für $h \in \mathbb{N}$ sei die folgende Funktion definiert:

$$\begin{aligned} a_h(\zeta, z) &:= \left[1 - \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\widehat{\Phi}(\zeta, z)}\right)^{2n}\right]^h \\ &= \left(\frac{-r(\zeta)}{\widehat{\Phi}(\zeta, z)}\right)^h \left[\sum_{j=0}^{2n-1} \left(\frac{\Phi(\zeta, z)}{\widehat{\Phi}(\zeta, z)}\right)^j\right]^h \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D^{(m)}} \times D^{(m)}) \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit der Funktion a_h auf $\overline{D^{(m)}} \times D^{(m)}$ ist aus den später angegebenen Hilfssatz 4.2.5 ersichtlich. Es gilt $\overline{\partial}_z a_h(\zeta, z) = 0$.

$$\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta, z) = (-2nh) \left(\frac{-r(\zeta)}{\widehat{\Phi}}\right)^{h-1} \left[\sum_{j=0}^{2n-1} \left(\frac{\Phi}{\widehat{\Phi}}\right)^j\right]^{h-1} \left(\frac{\Phi}{\widehat{\Phi}}\right)^{2n-1} \frac{\Phi\, \overline{\partial}_\zeta r(\zeta) - r(\zeta)\, \overline{\partial}_\zeta \Phi}{\widehat{\Phi}^2}$$

Nun kann der Satz über die Lösbarkeit der $\overline{\partial}$-Gleichung auf $D^{(m)}$ formuliert werden.

Satz 4.2.1 (Lösungsoperator auf $D^{(m)}$ nach Dautov und Henkin)
Seien $1 \leq q \leq n$ und Φ, $\widehat{\Phi}$, $\widehat{W}$ und a_h wie oben definiert. Für Formen F in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(D^{(m)})$ für ein $h \in \mathbb{N}$ sei der linearer Operator T^h_q wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T^h_q F &:= (-1)^{q-1} \int\limits_{D^{(m)} \times [0,1]} F \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h \wedge \Omega_{q-1}(\widehat{W}) - \int\limits_{D^{(m)}} a_h\, F \wedge K_{q-1} \\ &=: (-1)^{q-1}\, I^h_q F + J^h_q F \end{aligned}$$

Dann ist $T^h_q F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$, und auf $D^{(m)}$ gilt die Formel $\overline{\partial} T^h_q F = F$.

Bemerkung 4.2.2 (Sonderfall $q = n$)
Für $q = n$ verschwindet im Satz 4.2.1 das erste Integral, denn $F \wedge \Omega_{n-1}(\widehat{W})$ ist eine (n, n)-Form in ζ und $\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta, z)$ eine $(0, 1)$-Form in ζ.

Bemerkung 4.2.3
Offenbar gibt es zu jeder zurückgezogenen Form $F := B^* f$, $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ (mit $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$), eine natürliche Zahl h, so daß der Operator T^h_q aus Satz 4.2.1 auf F angewendet werden kann und eine Lösung der Gleichung $\overline{\partial} U = F$ liefert. Die Form F genügt nämlich nach Satz 2.4.4 auf $D^{(m)}$ der Abschätzung $|F(z)| \leq \widetilde{C}_k\, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\, \delta(z)^{-\gamma(k,m,q)}$ mit einer nur von k abhängigen Konstanten

$\widetilde{C}_k > 0$. Weiter gilt $|r(z)| \lesssim \delta(z)$ für alle $z \in D^{(m)}$, und nach Satz 2.4.6 ist F integrabel, falls $\gamma(k,m,q) < 2n$ ist. Es gilt also für $F = B^* f$ mit $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$:

$$|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(D^{(m)}) \quad \text{für} \quad \begin{cases} h \geq 1 & \text{mit} \quad \gamma(k,m,q) < 2n \\ h > \gamma(k,m,q) - (2n-1) & \text{mit} \quad \gamma(k,m,q) \geq 2n \end{cases}$$

Bevor der Satz 4.2.1 bewiesen werden kann, werden einige Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 4.2.4 (Eigenschaften von $\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v)$)
Für alle $(\xi, v) \in \overline{B^{(n)}} \times \overline{B^{(n)}}$ gelten folgende Abschätzungen:

(i) $2\,\mathrm{Re}\,\Phi_{B^{(n)}}(\xi, v) \gtrsim s(\xi) - s(v) + \|\xi - v\|^2$

(ii) $|\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v)| \gtrsim \|\xi - v\|^2$

(iii) $|\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v)| \gtrsim |\Phi_{B^{(n)}}(\xi, v)|$

(iv) $|\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v)| \gtrsim |\mathrm{Im}\,\Phi_{B^{(n)}}(\xi, v)| + |s(\xi)| + |s(\xi) - s(v)| + \|\xi - v\|^2$

(v) $|\widehat{\Phi}_{B^{(n)}}(\xi, v)| \gtrsim |\mathrm{Im}\,\Phi_{B^{(n)}}(\xi, v)| + |s(v)| + |s(\xi) - s(v)| + \|\xi - v\|^2$

Beweis:
Der Beweis erfolgt durch Ausnutzen der strengen Konvexität von $B^{(n)}$. □

Hilfssatz 4.2.5 (Eigenschaften von $\widehat{\Phi}(\zeta, z)$)
Für alle $(\zeta, z) \in \overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$ gelten folgende Abschätzungen:

(i) $2\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta, z) \gtrsim r(\zeta) - r(z) + \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2$

(ii) $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2$

(iii) $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim |\Phi(\zeta, z)|$

(iv) $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim |\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta, z)| + |r(\zeta)| + |r(\zeta) - r(z)| + \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2$

(v) $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim |\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta, z)| + |r(z)| + |r(\zeta) - r(z)| + \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2$

Beweis:
Der Hilfssatz folgt direkt durch Einsetzen von $\xi = \pi(\zeta)$ und $v = \pi(z)$ in die Abschätzungen aus Hilfssatz 4.2.4. □

Bemerkung 4.2.6
Die Abschätzungen (iv) und (v) in Hilfssatz 4.2.5 zeigen, daß $\widehat{\Phi}$ höchstens für $\zeta, z \in bD^{(m)}$ mit $\pi(\zeta) = \pi(z)$ verschwindet.

Hilfssatz 4.2.7

Seien $z, \zeta \in \overline{D^{(m)}}$. Sind $z = z^1, z^2, \ldots, z^j \in \overline{D^{(m)}}$ (mit $1 \leq j \leq \widetilde{M}$) die paarweise verschiedenen Urbilder von $\pi(z)$ unter π in $\overline{D^{(m)}}$ mit den dazu gehörigen Verzweigungsordnungen $\operatorname{ord}(z^1), \ldots, \operatorname{ord}(z^j)$, so gelten folgende Aussagen:

(i) Für alle $(\zeta, z) \in \overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$ gilt

$$\|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2 \gtrsim \left(\prod_{i=1}^{j} \|\zeta - z^i\|^{2\operatorname{ord}(z^i)} \right).$$

(ii) Sei $\widetilde{m} := \max\{\operatorname{ord}(z) : z \in bD^{(m)}\} = \max_{l=1,\ldots,n} \left\{ \prod_{i=1,\, i\neq l}^{n} m_i \right\}$ die maximale Verzweigungsordnung auf dem Rand von $D^{(m)}$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von $bD^{(m)}$, so daß für alle $z \in U \cap \overline{D^{(m)}}$ und $\zeta \in \overline{D^{(m)}}$ gilt

$$\|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2 \gtrsim \min_{i=1,\ldots,j} \left\{ \|\zeta - z^i\|^{2\widetilde{m}} \right\}.$$

Beweis:

Der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden. Er folgt mit Methoden aus der Diplomarbeit [Bu] von Buchholz. □

Beweis von Satz 4.2.1:

Das Gebiet $D^{(m)}$ wird mit komplexen Pseudoellipsoiden D_δ für $0 < \delta < \delta_0 << 1$ ausgeschöpft: $D_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : r_\delta(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} - 1 + \delta < 0 \right\}$. Für $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$ mit $|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(D^{(m)})$ für ein $h \in \mathbb{N}$ (und $1 \leq q \leq n$) wird die Bochner-Martinelli-Koppelman Formel (vgl. Satz 3.1.6) für die Gebiete D_δ auf die Differentialform

$$g_w(\zeta) := a_h(\zeta, w) F(\zeta) \, \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \text{ für } w \in D^{(m)}$$

angewendet. Wegen $\overline{\partial} F = 0$ gilt $\overline{\partial}_\zeta g_w(\zeta) = (\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta, w)) \wedge F(\zeta)$. Nach der BMK-Formel gilt für $z \in D_\delta$ und $w \in D^{(m)}$:

$$\begin{aligned} a_h(z,w)F(z) \;&=\; \int\limits_{bD_\delta} a_h(\zeta,w)F(\zeta) \wedge K_q(\zeta,z) - \int\limits_{D_\delta} (\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,w)) \wedge F(\zeta) \wedge K_q(\zeta,z) \\ &\quad - \overline{\partial}_z \int\limits_{D_\delta} a_h(\zeta,w)F(\zeta) \wedge K_{q-1}(\zeta,z) \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß für $q = n$ nur das dritte Integral auftritt. Nun wird der Grenzübergang $\delta \to 0$ durchgeführt. Durch Anwenden des Satzes von Stokes und der Voraussetzung $|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(D^{(m)})$ ergibt sich nach geeigneten Umformungen:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{bD_\delta} a_h(\zeta,w)F(\zeta)\wedge K_q(\zeta,z) &= 0 \\
\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta} \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,w)\wedge F(\zeta)\wedge K_q(\zeta,z) &= \int\limits_{D^{(m)}} \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,w)\wedge F(\zeta)\wedge K_q(\zeta,z) \\
\lim_{\delta\to 0} \overline{\partial}_z \int\limits_{D_\delta} a_h(\zeta,w)F(\zeta)\wedge K_{q-1}(\zeta,z) &= (\overline{\partial}_z+\overline{\partial}_w) \int\limits_{D^{(m)}} a_h(\zeta,w)F(\zeta)\wedge K_{q-1}(\zeta,z)
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei dem dritten Integral $\overline{\partial}_w a_h(\zeta,w)=0$ ausgenutzt. Jetzt werden die Variablen w und z gleichgesetzt. Für $z\in D^{(m)}$ ergibt sich mit $g_w(z)\,|_{w=z}=F(z)$ folgende Formel:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (-1)^{q-1}\,\widetilde{I}^h_q F(z) \;-\; \overline{\partial}_z \int\limits_{D^{(m)}} a_h(\zeta,z)F(\zeta)\wedge K_{q-1}(\zeta,z) \quad \text{mit} \\
\widetilde{I}^h_q F(z) &:= \int\limits_{D^{(m)}} F(\zeta)\wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge K_q(\zeta,z)
\end{aligned}$$

Für $q=n$ verschwinden die Integrale $\widetilde{I}^h_n F(z)$, und die Behauptung ist bewiesen. Es wird also nur noch der Fall $1\le q\le n-1$ betrachtet.

$$\widetilde{I}^{h,\delta}_q F(z) := \int\limits_{D_\delta} F(\zeta)\wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge K_q(\zeta,z) \quad \text{für } z\in D_\delta$$

Dann gilt $\quad \lim\limits_{\delta\to 0}\widetilde{I}^{h,\delta}_q F(z) = \widetilde{I}^h_q F(z).$

$\widetilde{I}^{h,\delta}_q F(z)$ wird nun mit dem Satz von Stokes noch weiter umgeformt. Für

$$\widehat{W}(\zeta,z) = \lambda\,\frac{w(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)} + (1-\lambda)B(\zeta,z) \;\in \mathcal{C}^{\infty,\infty}_{(1,0),(0,0)}((bD_\delta\times[0,1])\times D_\delta)$$

sei $\Omega_q(\widehat{W})$ der zugehörige auf $(bD^{(m)}\times[0,1])\times D^{(m)}$ und auf $(bD_\delta\times[0,1])\times D_\delta$ (für $0<\delta<\delta_0$) definierte Cauchy-Fantappiè-Kern. Mit $\mu_\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\times[0,1]$, $\mu_\lambda(\zeta) := (\zeta,\lambda)$ gilt $\mu_0^*\Omega_q(\widehat{W}) = \Omega_q(B) = K_q$ und $\mu_1^*\Omega_q(\widehat{W}) = \Omega_q(W)$ auf $bD^{(m)}\times D^{(m)}$ und auf $bD_\delta\times D_\delta$ (für $0\le q\le n$). Damit kann $\widetilde{I}^{h,\delta}_q F(z)$ auch notiert werden als

$$\widetilde{I}^{h,\delta}_q F(z) = \int\limits_{D_\delta} F(\zeta)\wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge \mu_0^*\Omega_q(\widehat{W}).$$

Eine Variante des Satzes von Stokes soll nun auf das Integral

$$\int\limits_{D_\delta\times[0,1]} (d_\zeta+d_\lambda)\Big(F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W})\Big) \quad \text{für } z\in D_\delta \tag{2}$$

angewendet werden. Das Integral $\widetilde{I}_q^{h,\delta}F(z)$ tritt dann als das Randintegral über $D_\delta \times \{0\}$ auf. Um zu zeigen, daß das Integral (2) existiert und der Satz von Stokes benutzt werden kann, werden zunächst die Bezeichnungen $G_\delta := D_\delta \times [0,1]$ und $H(\zeta,\lambda,z) := F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W})$ für $(\zeta,\lambda,z)\in(\overline{D_\delta}\times[0,1])\times D_\delta$ eingeführt.

$$\begin{aligned} d_{\zeta,\lambda}H(\zeta,\lambda,z) &:= (d_\zeta + d_\lambda)H(\zeta,\lambda,z) = (\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\left(F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W})\right) \\ &= (-1)^{q+1}F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge(\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\Omega_q(\widehat{W}) \end{aligned}$$

$$|F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)| \le C\left(\frac{|F|\,|r|^{h-1}\,|\Phi|^{2n}\,|\overline{\partial}_\zeta r|}{|\widehat{\Phi}|^{2n+h}} + \frac{|F|\,|r|^{h}\,|\Phi|^{2n-1}\,|\overline{\partial}_\zeta \Phi|}{|\widehat{\Phi}|^{2n+h}}\right)$$

Der Term $|F|\,|r|^{h-1}$ ist integrabel. Die Berechnung von $\Omega_q(\widehat{W})$ ergibt, daß $\Phi(\zeta,z)$ im Nenner maximal mit der Potenz n auftritt, wogegen in $F\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)$ der Term $\Phi(\zeta,z)$ mit der Potenz $(2n-1)$ im Zähler vorkommt. Nach dem Kürzen der $\Phi(\zeta,z)$-Terme kompensieren die übrigen $\Phi(\zeta,z)$-Terme im Zähler noch genügend $\|\zeta-z\|$-Terme im Nenner, um zu gewährleisten, daß H und $d_{\zeta,\lambda}H$ für $z\in D_\delta$ existieren und stetig auf $\overline{D_\delta}\times[0,1]$ sind. Daraus folgt, daß sämtliche partiellen Ableitungen der Koeffizienten von H höchstens in z eine Singularität haben können. Weiter ist $H(\zeta,\lambda,z)$ für festes $z\in D_\delta$ eine Form vom Grad $2n$ in (ζ,λ) mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^1((\overline{D_\delta}\setminus\{\zeta\in\mathbb{C}^n : \|\zeta-z\|<\nu\})\times[0,1])$ für alle $\nu>0$ mit $B(z,\nu)\subset\subset D_\delta$ (für alle $\delta<\delta_0$). Für das Gebiet $G_\delta^\nu := (D_\delta\setminus\{\zeta\in\mathbb{C}^n : \|\zeta-z\|\le\nu\})\times[0,1]$ kann nun der Satz von Stokes angewendet werden.

$$\int\limits_{G_\delta^\nu} d_{\zeta,\lambda}H(\zeta,\lambda,z) = \int\limits_{bG_\delta^\nu} H(\zeta,\lambda,z)$$

Da alle auftretenden Integranden stetig auf $\overline{G_\delta}$ sind und damit insbesondere Koeffizientenfunktionen in $\mathcal{L}^1(G_\delta)$ haben, kann der Grenzübergang $\nu\to 0$ durchgeführt werden. Das Randintegral über $\{\zeta\in\mathbb{C}^n : \|\zeta-z\|=\mu\}\times[0,1]$ strebt gegen Null. Es ergibt sich also

$$\int\limits_{G_\delta} d_{\zeta,\lambda}H(\zeta,\lambda,z) = \int\limits_{bG_\delta} H(\zeta,\lambda,z) \quad \text{für } z\in D_\delta.$$

Ausgeschrieben lautet die Formel für $z\in D_\delta$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{D_\delta\times[0,1]} (\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\left(F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W})\right) \qquad (3) \\ &= \int\limits_{bD_\delta\times[0,1]} F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W}) - \int\limits_{D_\delta\times\{0\}} F(\zeta)\wedge\overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z)\wedge\Omega_q(\widehat{W}) \end{aligned}$$

Das Integral über $D_\delta \times \{1\}$ verschwindet, da $q \geq 1$ und die erzeugende Form W holomorph in z ist.

Nun wird wieder der Grenzübergang $\delta \to 0$ durchgeführt. Durch geschicktes Ausnutzen von $|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(D^{(m)})$, sowie Anwenden des Satzes von Stokes ergibt sich

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{bD_\delta \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \Omega_q(\widehat{W}) \;\; = \;\; 0.$$

Das Integral über $D_\delta \times [\,0,1]$ wird weiter umgeformt. Mit der Identität

$$(\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\Omega_q(\widehat{W}) = (-1)^q \overline{\partial}_z \Omega_{q-1}(\widehat{W})$$

(vgl. [Ra2] Seite 173, Kapitel IV, Lemma 3.5) gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta \times [\,0,1]} (\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\Big(F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \Omega_q(\widehat{W})\Big) \\
&= \;(-1)^{q+1} \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge (\overline{\partial}_\zeta + d_\lambda)\Omega_q(\widehat{W}) \\
&= \;-\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{D_\delta \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{q-1}(\widehat{W}) \\
&= \;- \int\limits_{D^{(m)} \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \overline{\partial}_z \Omega_{q-1}(\widehat{W}) \\
&= \;- \overline{\partial}_z \int\limits_{D^{(m)} \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \Omega_{q-1}(\widehat{W})
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3) ergibt sich

$$\int\limits_{D^{(m)}} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge K_q(\zeta,z) = \overline{\partial}_z \int\limits_{D^{(m)} \times [\,0,1]} F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta,z) \wedge \Omega_{q-1}(\widehat{W}),$$

und die Behauptung ist bis auf die Glattheit von $T_q^h F$ bewiesen. Die Glattheit der Lösung wird wie üblich durch das Untersuchen der Integrale gezeigt, worauf hier aber nicht weiter eingegangen wird. $\square$

4.3 Abschätzung des Lösungsoperators

Nun werden die beiden Integrale im Lösungsoperator T_q^h aus Satz 4.2.1 untersucht. Das Integral mit dem BMK-Kern kann mit einer von F unabhängigen Konstante $C > 0$ folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$|J_q^h F(z)| \leq \int\limits_{D^{(m)}} |a_h\, F \wedge K_{q-1}| \leq C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F|\,|r|^h\, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^h\, \|\zeta - z\|^{2n-1}} =: \widehat{J}^h F(z)$$

Das andere Integral ist komplizierter. Zunächst wird über λ integriert.

$$I_q^h F(z) = \sum_{l=0}^{n-q-1} a_{q-1}^l \int\limits_{D^{(m)}} \frac{F \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h \wedge A_{q-1}^l(w, \partial_\zeta \beta)}{\Phi^{l+1} \beta^{n-l-1}} =: \sum_{l=0}^{n-q-1} a_{q-1}^l\, I_{q,l}^h F(z)$$

mit $A_{q-1}^l(w, \partial_\zeta\beta) := w \wedge (\partial_\zeta \beta) \wedge (\overline{\partial}_\zeta w)^l \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-l} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1}$ und mit numerischen Konstanten a_{q-1}^l. Aus der Darstellung von $F(\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta a_h(\zeta, z)$ und den Abschätzungen in Hilfssatz 4.2.5 folgt, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für $l = 0, 1, \ldots, n-q-1$ gilt:

$$|I_{q,l}^h F(z)| \leq C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F|\,|r|^{h-1}}{|\widehat{\Phi}|^{h+l+1}\, \beta^{(2n-2l-3)/2}} \frac{|\overline{\partial}_\zeta r \wedge A_{q-1}^l(w, \partial_\zeta\beta)|}{\beta^{1/2}}\, dV(\zeta) \tag{4}$$

$$+ C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F|\,|r|^{h}}{|\widehat{\Phi}|^{h+l+2}\, \beta^{(2n-2l-4)/2}} \frac{|\overline{\partial}_\zeta \Phi \wedge A_{q-1}^l(w, \partial_\zeta\beta)|}{\beta}\, dV(\zeta) \tag{5}$$

Der zweite Bruch hinter dem Integral ist jeweils beschränkt und kann durch eine von z unabhängige Konstante nach oben abgeschätzt werden. Also genügt es, die folgenden Integrale für $l = 0, 1, \ldots, n-q-1$ zu betrachten:

$$\widehat{I}_l^{h,1} F(z) := \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F|\,|r|^{h-1}\, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{h+l+1}\, \|\zeta - z\|^{2n-2l-3}}$$

$$\widehat{I}_l^{h,2} F(z) := \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F|\,|r|^{h}\, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{h+l+2}\, \|\zeta - z\|^{2n-2l-4}}$$

Um aufzuzeigen, wo der Fehler in der Arbeit von Barletta und Parrini aufgetreten ist, wird das Vorgehen in [BaPa] mit dem in der Arbeit [DaHe] von Dautov und Henkin verglichen. Der Lösungsoperator in Satz 4.2.1 stimmt mit dem Lösungsoperator in [DaHe] für den Fall eines glatt berandeten, streng konvexen Gebietes G und einer Form $F \in \mathcal{C}_{(0,q)}^\infty(G) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $|F|\,|r|^{h-1} \in \mathcal{L}^1(G)$ für ein $h \in \mathbb{N}$ formal überein.[14]

[14] Die unterschiedlichen Vorzeichen kommen durch verschiedene Notationskonventionen zustande. Insbesondere arbeiten Dautov und Henkin nicht mit Doppelformen, sondern mit äußeren Formen auf der Produktmannigfaltigkeit $(D^{(m)} \times [0,1]) \times D^{(m)}$.

Dabei sind für ein streng konvexes, glatt berandetes Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C}^n : \widetilde{r}(z) < 0\}$ (mit einer Randfunktion $\widetilde{r}$ mit $d\widetilde{r}|_{bG} \neq 0$) im Satz 4.2.1 das Gebiet $D^{(m)}$ durch das streng konvexe Gebiet G und die Funktionen r, Φ, $\widehat{\Phi}$ und w durch $\widetilde{r}$, Φ_G, $\widehat{\Phi}_G$ und w_G zu ersetzen, welche wie folgt definiert sind:

$$\Phi_G(\zeta, z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{r}(\zeta)}{\partial \zeta_j} (\zeta_j - z_j) \quad \text{und} \quad \widehat{\Phi}_G(\zeta, z) := \Phi_G(\zeta, z) - \widetilde{r}(\zeta)$$

$$w_G(\zeta, z) := \sum_{j=1}^{n} w_{G,j}(\zeta, z)\, d\zeta_j \quad \text{mit} \quad w_{G,j}(\zeta, z) := \frac{\partial \widetilde{r}(\zeta)}{\partial \zeta_j} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

Auf Grund der formalen Gleichheit der Lösungsoperatoren genügt es, für den Fall eines streng konvexen Gebietes G folgende Integrale zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}^h F(z) &:= \int_G \frac{|F|\, |\widetilde{r}|^h \, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}_G|^h \, \|\zeta - z\|^{2n-1}} \\
\widetilde{I}_l^{h,1} F(z) &:= \int_G \frac{|F|\, |\widetilde{r}|^{h-1} \, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}_G|^{h+l+1} \, \|\zeta - z\|^{2n-2l-3}} \quad \text{für } l = 0, 1, \ldots, n-q-1 \\
\widetilde{I}_l^{h,2} F(z) &:= \int_G \frac{|F|\, |\widetilde{r}|^{h} \, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}_G|^{h+l+2} \, \|\zeta - z\|^{2n-2l-4}} \quad \text{für } l = 0, 1, \ldots, n-q-1
\end{aligned}$$

Wegen der strengen Konvexität von G gilt für $(\zeta, z) \in \overline{G} \times \overline{G}$ die Abschätzung

$$|\widehat{\Phi}_G(\zeta, z)| \gtrsim |\operatorname{Im} \Phi_G(\zeta, z)| + |\widetilde{r}(z)| + |\widetilde{r}(\zeta) - \widetilde{r}(z)| + \|\zeta - z\|^2.$$

In [DaHe] wird für $l = 0, 1, \ldots, n-q-1$ im Nenner der Integranden von $\widetilde{I}_l^{h,1} F(z)$ und $\widetilde{I}_l^{h,2} F(z)$ der Term $|\widehat{\Phi}_G(\zeta, z)|^l$ mit $|\widehat{\Phi}_G(\zeta, z)| \gtrsim \|\zeta - z\|^2$ nach unten abgeschätzt.

$$\widetilde{I}_l^{h,1} F(z) \leq C \int_G \frac{|F|\, |\widetilde{r}|^{h-1} \, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}_G|^{h+1} \, \|\zeta - z\|^{2n-3}} =: \widetilde{H}^{h,1} F(z) \tag{6}$$

$$\widetilde{I}_l^{h,2} F(z) \leq C \int_G \frac{|F|\, |\widetilde{r}|^{h} \, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}_G|^{h+2} \, \|\zeta - z\|^{2n-4}} =: \widetilde{H}^{h,2} F(z) \tag{7}$$

Auf dem Gebiet $D^{(m)}$ gilt dagegen nach Hilfssatz 4.2.5 (v)

$$|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim |\operatorname{Im} \Phi(\zeta, z)| + |r(z)| + |r(\zeta) - r(z)| + \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2,$$

und der quadratische Term genügt nach Hilfssatz 4.2.7 (ii) mit einer ausreichend kleinen Umgebung U von $bD^{(m)}$ für $z \in U \cap \overline{D^{(m)}}$ und $\zeta \in \overline{D^{(m)}}$ der Abschätzung

$$\|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2 \gtrsim \min_{i=1,\ldots,j} \left\{ \|\zeta - z^i\|^{2\widetilde{m}} \right\},$$

wobei $z = z^1, \dots, z^j$ die paarweise verschiedenen Urbilder aus $\pi^{-1}(\pi(z))$ und $\widetilde{m} := \max\{\mathrm{ord}(z) : z \in bD^{(m)}\}$ sind.[15] Das Integrationsgebiet darf ebenfalls auf $U \cap D^{(m)}$ eingeschränkt werden, da für $\zeta \notin U \cap D^{(m)}$ die Abschätzung $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \geq C$ mit einer von ζ unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt. Das Integrationsgebiet $U \cap D^{(m)}$ wird in die Teilmengen

$$A(z^i) := \left\{ \zeta \in U \cap D^{(m)} : \|\zeta - z^i\| \leq \min_{l=1,\dots,j} \left\{ \|\zeta - z^l\| \right\} \right\} \quad \text{mit } i = 1, \dots, j$$

zerlegt. (Dann gilt $U \cap D^{(m)} = \bigcup_{i=1}^{j} A(z^i)$.) Für $z \in U \cap D^{(m)}$ ergibt sich auf $A(z^i)$ als Abschätzung für $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)|$ nach unten

$$|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim \|\pi(\zeta) - \pi(z)\|^2 \gtrsim \|\zeta - z^i\|^{2\widetilde{m}} \quad \text{für } \zeta \in A(z^i). \tag{8}$$

Weiter reicht es, über $A(z^i) \cap B(z^i, \nu)$ (statt über $A(z^i)$) zu integrieren, wobei der Radius $\nu > 0$ hinreichend klein und unabhängig von $\pi^{-1}(\pi(z))$ gewählt wird. Ohne Einschränkung wird $A(z^i) \cap B(z^i, \nu)$ zu $B(z^i, \nu) \cap D^{(m)}$ vergrößert. Die Randumgebung U (mit $\pi^{-1}(\pi(z)) \subset U$) und der Radius ν seien bereits so klein gewählt, daß alle später benutzten lokalen Koordinaten auf $B(z^i, \nu) \cap D^{(m)}$ existieren. Wegen $\pi(z) = \pi(z^i)$ und $\beta \geq \|\zeta - z^i\|^2$ auf $A(z^i)$ genügt es nun für $i = 1, \dots, j$ und $l = 0, 1, \dots, n - q - 1$ die folgenden Integrale zu betrachten:

$$\widehat{H}_l^{h,1} F(z^i) := \int\limits_{B(z^i,\nu) \cap D^{(m)}} \frac{|F(\zeta)|\, |r(\zeta)|^{h-1}\, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}(\zeta, z^i)|^{h+l+1}\, \|\zeta - z^i\|^{2n-2l-3}} \tag{9}$$

$$\widehat{H}_l^{h,2} F(z^i) := \int\limits_{B(z^i,\nu) \cap D^{(m)}} \frac{|F(\zeta)|\, |r(\zeta)|^{h}\, dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}(\zeta, z^i)|^{h+l+2}\, \|\zeta - z^i\|^{2n-2l-4}} \tag{10}$$

Da die Integrale für $\widehat{H}_l^{h,1} F(z^i)$ und $\widehat{H}_l^{h,2} F(z^i)$ für $i = 1, \dots, j$ genau gleich behandelt werden, wird in (9) und (10) wieder $z^i = z$ gesetzt, und es gilt $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim \|\zeta - z\|^{2\widetilde{m}}$. Für ein komplexes Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ mit $m \neq (1, \dots, 1)$ gilt

$$\widetilde{m} = \max\left\{\mathrm{ord}(z) : z \in bD^{(m)}\right\} = \max_{l=1,\dots,n} \left\{ \prod_{i=1,\, i\neq l}^{n} m_i \right\} > 1.$$

Für $q < n - 1$ ist es also nicht bewiesen, ob die Integrale $\widehat{H}_l^{h,1} F(z)$ bzw. $\widehat{H}_l^{h,2} F(z)$ wie in (6) bzw. (7) abgeschätzt werden können.

Für $q = n - 1$ treten nur die Integrale $\widehat{I}_0^{h,1} F(z)$ und $\widehat{I}_0^{h,2} F(z)$ auf, die formal den Integralen $\widetilde{H}^{h,1} F(z)$ und $\widetilde{H}^{h,2} F(z)$ entsprechen.

[15] Es genügt, z aus einer Umgebung U des Randes $bD^{(m)}$ zu betrachten, da außerhalb einer solchen $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \geq C$ mit einer von z unabhängigen Konstante $C > 0$ gilt.

Barletta und Parrini haben in [BaPa] die Abschätzung $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim \|\zeta - z\|^2$ benutzt und erhalten so formal die Abschätzungen (6) und (7) wie Dautov und Henkin. Das ist für komplexe Pseudoellipsoide $D^{(m)}$ mit $m \neq (1, \dots, 1)$ für $(0, q)$-Formen F mit $q < n-1$ nicht bewiesen worden, und es ist wahrscheinlich auch falsch. Barletta und Parrini haben also nur die Integrale $\widehat{I}_0^{h,1}F(z)$ und $\widehat{I}_0^{h,2}F(z)$ berücksichtigt, welche die günstigsten Fälle sind. Daher sind die am Anfang dieses Kapitels zitierten Ergebnisse aus [BaPa] für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,1)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ für $n \geq 3$ unbewiesen und vermutlich falsch.

In dem Fall $q = n$ und im Fall $q = n - 1$ können die Integrale mit einem ähnlichen Vorgehen wie in [BaPa] abgeschätzt werden, um die Bedingung an der Parameter k für das Auftreten beschränkter Lösungen auszurechnen. Es ist allerdings einfacher, die Integrale in diesem Fall mit dem Verfahren, welches im sechsten Kapitel vorgestellt wird, bzgl. $\delta(z)$ abzuschätzen. Insbesondere erhält man dadurch auch eine Antwort auf die etwas allgemeinere Fragestellung dieser Arbeit. Da dieses Vorgehen aber nur in den Sonderfällen $q = n$ und $q = n - 1$ funktioniert, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Es stellt sich natürlich die Frage, ob die Integrale $\widehat{H}_l^{h,1}F(z)$, $\widehat{H}_l^{h,2}F(z)$ (für $l = 0, 1, \dots, n - q - 1$) und $\widehat{J}^h F(z)$ geeignet abgeschätzt werden können.

Zunächst soll nur der einfachste Fall einer beschränkten Form F, also insbesondere $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)})$ und $h = 1$, betrachtet werden. Es seien z ein Punkt aus der Randumgebung U und $\|F\|_{D^{(m)}} := \sup_{z \in D^{(m)}} |F(z)|$ die Supremumsnorm von F auf $D^{(m)}$. Nach Hilfssatz 4.2.5 (iv) gilt $|r(\zeta)| \lesssim |\Phi(\zeta, z)|$. Wird diese Abschätzung in den Zähler der Integranden eingesetzt, so erkennt man, daß nur noch folgende Integrale zu betrachten sind:

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_l^{1,1}F(z) &\leq C\,\|F\|_{D^{(m)}} \int\limits_{B(z,\nu)\cap D^{(m)}} \frac{dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{l+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2l-3}} =: C\,\|F\|_{D^{(m)}}\,H_l^1(z) \\
\widehat{I}_l^{1,2}F(z) &\leq C\,\|F\|_{D^{(m)}} \int\limits_{B(z,\nu)\cap D^{(m)}} \frac{dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{l+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2l-4}} =: C\,\|F\|_{D^{(m)}}\,H_l^2(z) \\
\widehat{J}^1 F(z) &\leq C\,\|F\|_{D^{(m)}} \int\limits_{D^{(m)}} \frac{dV(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \leq \widetilde{C}\,\|F\|_{D^{(m)}}
\end{aligned}$$

Das Integral $\widehat{J}^1 F(z)$ bereitet also keine Schwierigkeiten.[16] Außerdem gilt $H_l^2(z) \leq H_l^1(z)$; es genügt also $H_l^1(z)$ zu betrachten. Von nun an wird nur noch

[16]Auch für unbeschränktes F mit einer Abschätzung $|F(z)|\,\delta(z)^\gamma \leq C_F$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \gamma < 2n$ (und einer von F abhängigen Konstanten $C_F > 0$), kann das Integral $\widehat{J}^h F(z)$ problemlos gegen $\delta(z)$ abgeschätzt werden. Das folgt aus den Berechnungen im sechsten Kapitel.

$l > 0$ betrachtet, denn für $l = 0$ tritt der günstigste Integralkern auf. Ohne Einschränkung gelte auf $B(z,\nu)$ die Bedingung $\frac{\partial r(\zeta)}{\partial \zeta_n} \neq 0$. Dann können auf $B(z,\nu)$ die folgenden reellen Koordinaten $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{2n}) = (t', t_{2n-1}, t_{2n})$ gewählt werden.

$$t'(\zeta) := (\mathrm{Re}\,(\zeta_1 - z_1), \mathrm{Im}\,(\zeta_1 - z_1), \ldots, \mathrm{Re}\,(\zeta_{n-1} - z_{n-1}), \mathrm{Im}\,(\zeta_{n-1} - z_{n-1}))$$

$$t_{2n-1}(\zeta) := \mathrm{Im}\,\Phi(\zeta, z),\; t_{2n}(\zeta) := r(\zeta) - r(z)$$

Ist $\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta)$ die reelle Funktionalmatrix der Koordinatentransformation $t(\zeta)$, dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $\zeta \in B(z,\nu)$ die Abschätzungen $\|\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta)\| \leq C$ und $|\det(\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta))| \geq 1/C$ gelten. Die Konstante C kann dabei unabhängig von $z \in U$ gewählt werden (vgl. auch Hilfssatz 6.3.3). Aus Hilfssatz 4.2.5 (v) und der Abschätzung (8) folgt:

$$H_l^1(z) \;\lesssim\; \int\limits_{\|t'\| \leq \nu} \int\limits_0^C \int\limits_0^C \frac{dt_{2n-1}\, dt_{2n}\, d\sigma_{2n-2}(t')}{(|r(z)| + |t_{2n}| + |t_{2n-1}| + \|t'\|^{2\widetilde{m}})^{l+2}\, \|t'\|^{2n-2l-3}}$$

Durch Integration über t_{2n-1} und t_{2n} ergeben sich für $l > 0$ folgende Integrale:

$$H_l^1(z) \;\lesssim\; \int\limits_{\|t'\| \leq \nu} \frac{d\sigma_{2n-2}(t')}{(|r(z)| + \|t'\|^{2\widetilde{m}})^l\, \|t'\|^{2n-2l-3}} \tag{11}$$

Da Abschätzungen bzgl. $\delta(z)$ benötigt werden, wird der Term $|r(z)|$ im Nenner weggelassen. Es müssen also für $l = 1, \ldots, n-q-1$ die Integrale

$$\int\limits_{\|t'\| \leq \nu} \frac{d\sigma_{2n-2}(t')}{\|t'\|^{2\widetilde{m}l + (2n-2l-3)}}$$

untersucht werden. Der ungünstigste Fall tritt für $l = n-q-1$ auf. Der Exponent von $\|t'\|$ kann für $\widetilde{m} \geq 2$ und $l = n-q-1$ wie folgt nach unten abgeschätzt werden:

$$2\widetilde{m}l + (2n-2l-3) = \widetilde{m}(2n-2q-2) + (2q+2-3) \geq (2q-1) + 2(2n-2q-2) = 4n-2q-5$$

Für $q \leq n-2$ ist dieser Exponent größer oder gleich $2n-1$, und damit existiert das Integral nicht mehr. Diese Methode ist also ungeeignet, um Abschätzungen bzgl. $\delta(z)$ zu gewinnen. Im Gegensatz dazu existieren die Integrale (11) für jedes feste $z \in D^{(m)}$ natürlich, allerdings ohne gleichmäßige Abschätzung in z.

Bemerkung 4.3.1

Es besteht noch die Möglichkeit, daß die Integrale (4) und (5) geeignet abgeschätzt werden können, indem die Komponentenfunktionen der Überlagerungsabbildung π (außerhalb der Nullmenge der Verzweigungspunkte) als lokale Koordinaten verwendet werden. Dies führt aber nicht zu brauchbaren Ergebnissen, weil nicht alle Terme aus der Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation, die im Nenner des Integranden auftreten, durch Terme im Zähler kompensiert werden.

5 Ein Integral-Lösungsoperator für komplexe Pseudoellipsoide

In diesem Kapitel wird Satz 3.1.11 zur Konstruktion eines Integral-Lösungsoperators auf $D^{(m)}$ für Formen $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ verwendet.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die Randfunktion von $D^{(m)}$ ab jetzt mit r statt $r^{(m)}$ bezeichnet. Weiter wird auch folgende Notation benutzt:

$$r_j := \frac{\partial r}{\partial \zeta_j},\ r_{\overline{j}} := \frac{\partial r}{\partial \overline{\zeta}_j},\ r_{jl} := \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_j \partial \zeta_l},\ r_{\overline{j}\overline{l}} := \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \overline{\zeta}_l},\ r_{j\overline{l}} := \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_l} \text{ und } r_{\overline{j}l} := \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{\zeta}_j \partial \zeta_l}$$

Das komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ ist ein konvexes Gebiet. Mit Hilfe der Randfunktion wird eine erzeugende Form definiert:

$$W(\zeta, z) := \frac{\partial_\zeta r(\zeta)}{< \partial_\zeta r(\zeta), \zeta - z >} \quad \text{für} \quad (\zeta, z) \in (bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)},$$

wobei $< \partial_\zeta r(\zeta), \zeta - z > := \sum_{j=1}^n r_j(\zeta)(\zeta_j - z_j)$ ist. Mit $\Phi(\zeta, z) :=< \partial_\zeta r(\zeta), \zeta - z >$ gilt dann:

$$\begin{aligned} W(\zeta, z) &= \frac{\partial_\zeta r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)} \qquad \text{mit} \\ \partial_\zeta r(\zeta) &= \sum_{j=1}^n r_j(\zeta)\, d\zeta_j = \sum_{j=1}^n m_j \overline{\zeta}_j |\zeta_j|^{2m_j-2}\, d\zeta_j \\ \Phi(\zeta, z) &= \sum_{j=1}^n r_j(\zeta)(\zeta_j - z_j) = \sum_{j=1}^n m_j \overline{\zeta}_j |\zeta_j|^{2m_j-2}(\zeta_j - z_j) \end{aligned}$$

Hilfssatz 5.1.1 (Eigenschaften von W)
Die Doppelform W hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Form W ist in $\mathcal{C}^{\infty,\infty}_{(1,0),(0,0)}((bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)})$.

(ii) W ist eine erzeugende Form (auf $bD^{(m)}$) für das Gebiet $D^{(m)}$.

(iii) Es gilt $\overline{\partial}_z W = 0$ auf $(bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}$.

(iv) Für $(\zeta, z) \in \overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$ gilt:

$$2\,\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta, z) \gtrsim r(\zeta) - r(z) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_j} |\zeta_j - z_j|^2 + \sum_{j=1}^n |\zeta_j - z_j|^{2m_j}$$

Beweis:
Es muß nur (iv) bewiesen werden. Aus der Abschätzung (iv) folgt nämlich, daß $\Phi(\zeta, z)$ auf $bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}$ nur für $(\zeta, z) \in \Delta bD^{(m)}$ verschwindet. Damit ist (i) bewiesen. Die Behauptungen (ii) bis (iii) folgen direkt aus den Definitionen.

Die Abschätzung (iv) wird in [Ra1] bewiesen. Die Idee ist, durch Taylorentwicklung zu zeigen, daß die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(\zeta) := |\zeta|^{2l}$ mit $l \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung erfüllt. Für alle $\zeta, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$g(z) - g(\zeta) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta}(\zeta - z)\right) \gtrsim \frac{\partial^2 g(\zeta)}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2l}.$$

Durch Anwendung dieser Abschätzung auf jeden einzelnen Summanden der Randfunktion folgt nun leicht die Abschätzung für Φ. □

Satz 5.1.2
Sei $1 \leq q \leq n$, $W(\zeta, z) := \dfrac{\partial_\zeta r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z)}$, und seien $T_q : \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \to \mathcal{C}^0_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ die folgenden linearen Operatoren:

$$\begin{aligned} T_q F &:= \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \int\limits_{bD^{(m)}} F \wedge \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\Phi^{j+1}\,\beta^{n-(j+1)}} - \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge K_{q-1} \\ &=: \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1}\, I_{q,j} F - J_q F \end{aligned}$$

$$\textit{mit} \quad \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta) := \partial_\zeta r \wedge \partial_\zeta \beta \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Für $k = 0, 1, \ldots, \infty$ und $F \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap \mathcal{C}^k_{(0,q)}(D^{(m)})$ gilt $T_q F \in \mathcal{C}^k_{(0,q-1)}(D^{(m)})$.

(ii) Ist $F \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$, so gilt auf $D^{(m)}$ die Formel $\overline{\partial} T_q F = F$.

Beweis:
Der Satz ist Satz 3.1.11 für das komplexe Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ mit der speziellen erzeugenden Form $W = \frac{\partial_\zeta r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)} = \frac{\partial_\zeta r(\zeta)}{<\partial_\zeta r(\zeta), \zeta - z>}$. □

Um zu einem Integral-Lösungsoperator ohne Randintegral übergehen zu können, muß die erzeugende Form W zu einer Form in $\mathcal{C}^{1,\infty}_{(1,0),(0,0)}((\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)})$ fortgesetzt werden. Dazu werden die folgenden Funktionen auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ definiert:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\zeta, z) &:= \Phi(\zeta, z) - r(\zeta) \\ \widehat{\beta}(\zeta, z) &:= \beta(\zeta, z) + r(\zeta)\, r(z) \end{aligned}$$

Hilfssatz 5.1.3 (Eigenschaften von $\widehat{\Phi}$ und $\widehat{\beta}$)
Die Funktionen $\widehat{\Phi}$ und $\widehat{\beta}$ sind in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$. Die Funktion $\widehat{\Phi}$ bzw. $\widehat{\beta}$ ist eine nullstellenfreie glatte Fortsetzung von Φ bzw. β auf $(\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}$. Auf $\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$ gelten folgende Abschätzungen:

(i) $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim -r(\zeta) - r(z) + |\operatorname{Im}\Phi(\zeta, z)| + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^{2m_j-2}|\zeta_j - z_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{2m_j}$

(ii) $(\widehat{\beta}(\zeta, z))^{1/2} \geq \|\zeta - z\|$

(iii) $(\widehat{\beta}(\zeta, z))^{1/2} \gtrsim |\widehat{\Phi}(\zeta, z)|$

Beweis:
Die Glattheit der beiden Funktionen, sowie

$$\widehat{\Phi}(\zeta, z)\Big|_{(bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}} = \Phi(\zeta, z) \quad \text{und} \quad \widehat{\beta}(\zeta, z)\Big|_{(bD^{(m)} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}} = \beta(\zeta, z)$$

ist offensichtlich. Die Behauptung, daß $\widehat{\beta}$ auf $(\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}$ keine Nullstellen hat, und die Abschätzung (ii) folgen direkt aus der Definition von $\widehat{\beta}$. Die Abschätzung (i) ist ein Folgerung aus dem Hilfssatz 5.1.1 (iv). Die Abschätzung (iii) wird folgendermaßen bewiesen. Nach dem Mittelwertsatz gilt $|r(\zeta) - r(z)| \lesssim \|\zeta - z\|$.

$$|r(\zeta) - r(z)| \lesssim \|\zeta - z\| \iff |r(\zeta) - r(z)|^2 \lesssim \|\zeta - z\|^2 \iff$$

$$(r(\zeta))^2 + (r(z))^2 \lesssim \|\zeta - z\|^2 + 2\, r(\zeta)\, r(z) \iff$$

$$(r(\zeta))^2 + (r(z))^2 \lesssim \|\zeta - z\|^2 + r(\zeta)\, r(z) = \widehat{\beta}(\zeta, z) \implies (r(\zeta))^2 \lesssim \widehat{\beta}(\zeta, z)$$

$$\implies |\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \leq \sum_{l=1}^{n} \left| \frac{\partial r(\zeta)}{\partial \zeta_l} \right| |\zeta_l - z_l| + |r(\zeta)| \lesssim \|\zeta - z\| + |r(\zeta)| \lesssim (\widehat{\beta}(\zeta, z))^{1/2}$$

Daß $\widehat{\Phi}$ auf $(\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}$ keine Nullstellen hat, folgt aus (i). □

Nun sei ein festes, sehr kleines $\delta_0 > 0$ vorgegeben, so daß $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |r(\zeta)| < 2\delta_0\}$ relativ kompakt in einer kleinen Umgebung U von $bD^{(m)}$ enthalten ist. Dann sei $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D^{(m)}})$ gegeben mit $\phi \geq 0$ und

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \zeta \in \overline{D^{(m)}} \quad \text{mit} \quad r(\zeta) \geq -\delta_0 \\ 0 & \text{für} \quad \zeta \in \overline{D^{(m)}} \quad \text{mit} \quad r(\zeta) \leq -2\delta_0 \end{cases}$$

Jetzt werden bei den Integralen $I_{q,j}F(z)$ die Funktionen Φ und β in den Nennern der Integralkerne durch ihre Fortsetzungen auf $(\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)}$ ersetzt, und die Integralkerne werden mit der Abschneidefunktion ϕ multipliziert.

Hilfssatz 5.1.4
Seien $1 \leq q \leq n$ und $\widehat{\Phi}$ und $\widehat{\beta}$ wie oben definiert. Dann gilt für alle $F \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}})$

$$T_q F = \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \int\limits_{bD^{(m)}} F \wedge \phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} - \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge K_{q-1}$$

mit $\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta) := \partial_\zeta r \wedge \partial_\zeta \beta \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1}.$ □

Für $F \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}})$ ist der Integrand $F \wedge \phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}}$ der Randintegrale in $\mathcal{C}^{1,\infty}_{(n,n-1),(0,q-1)}((\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}) \setminus \Delta bD^{(m)})$. Also kann für jedes (feste) $z \in D^{(m)}$ der Satz von Stokes angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{bD^{(m)}} F \wedge \phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} &= \int\limits_{D^{(m)}} d_\zeta \left(F \wedge \phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right) \\
&= \int\limits_{D^{(m)}} \overline{\partial}_\zeta \left(F \wedge \phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right)
\end{aligned}$$

Die zweite Umformung gilt, da der Integrand in den $d\zeta_j$ schon gesättigt ist. Die Integranden der so erhaltenen Gebietsintegrale verschwinden für $\zeta \in \overline{D^{(m)}}$ mit $r(\zeta) \leq -2\delta_0$. Daher ist $\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r(\zeta)$ auch auf dem eigentlichen Integrationsgebiet $\widetilde{U} := \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$ sinnvoll. $\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r(\zeta)$ kann nämlich mittels einer geeigneten Basis der $bD^{(m)}$-tangentialen $(0,1)$-Vektorfelder auf einer Umgebung eines beliebigen Randpunktes von $bD^{(m)}$ dargestellt werden. Nach Verkleinern von δ_0 darf angenommen werden, daß eine solche lokale Darstellung von $\overline{\partial}_{\zeta,T}\overline{\partial} r(\zeta)$ überall auf $\{\zeta \in \overline{D^{(m)}} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$ vorliegt.[17] Es ergibt sich der folgende Satz:

Satz 5.1.5 (Lösungsoperator mit Gebietsintegralen)
Sei $1 \leq q \leq n$ und $F \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$. Dann löst der lineare Operator $\widehat{T}_q : \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^1_{(0,q-1)}(D^{(m)})$,

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_q F &:= (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right) - \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge K_{q-1} \\
&=: (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1}\, \widehat{I}_{q,j} F - \widehat{J}_q F,
\end{aligned}$$

[17]Im Abschnitt 6.2 wird in Hilfssatz 6.2.3 eine solche lokale Darstellung angegeben.

die Gleichung $\overline{\partial} U = F$ *auf* $D^{(m)}$, *d. h. für alle* $F \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ *gilt* $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$ *auf* $D^{(m)}$. *Ist* $k = 2, 3, \ldots, \infty$ *und* $F \in \mathcal{C}^1_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}}) \cap \mathcal{C}^k_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$, *so ist* $\widehat{T}_q F \in \mathcal{C}^k_{(0,q-1)}(D^{(m)})$. □

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist die Aussage, daß der obige Lösungsoperator die $\overline{\partial}$-Gleichung auch noch für Formen in $\mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ löst.[18]

Satz 5.1.6 (Lösungsoperator für glatte $\mathcal{L}^1$-Formen)
Seien $\widehat{\Phi}(\zeta, z) := \Phi(\zeta, z) - r(\zeta)$ *und* $\widehat{\beta}(\zeta, z) := \beta(\zeta, z) + r(\zeta)\, r(z)$. *Für* $1 \leq q \leq n$ *seien folgende lineare Operatoren* $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ *definiert:*

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_q F \;&:=\; (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta)\, \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right) \;-\; \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge K_{q-1} \\
&=:\; (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1}\, \widehat{I}_{q,j} F - \widehat{J}_q F
\end{aligned}$$

$$mit \quad \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta) := \partial_\zeta r \wedge \partial_\zeta \beta \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1}$$

Dann gilt für alle $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ *auf* $D^{(m)}$ *die Formel* $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$. *(Dabei bezeichnet* $\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r$ *den* $bD^{(m)}$*-tangentialen Anteil von* $\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta r$*.)*

Beweis:
Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Es wird gezeigt:

(a) Der Operator ist wohldefiniert, d. h. die auftretenden Integrale existieren.

(b) Für alle $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ gilt $\widehat{T}_q F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$.

(c) $\widehat{T}_q$ löst die $\overline{\partial}$-Gleichung, d. h. es gilt $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$ auf $D^{(m)}$.

zu (a): Die Integrale $\widehat{I}_{q,j} F(z)$ sind für jedes $z \in D^{(m)}$ wohldefiniert, denn F ist in $\mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$, und der Kern kann gegen eine von z abhängige Konstante $C > 0$ abgeschätzt werden. Der BMK-Kern K_{q-1} genügt der Abschätzung $|K_{q-1}(\zeta, z)| \lesssim \|\zeta - z\|^{-2n+1}$ und ist somit integrabel mit einer Singularität im Gebietsinnern. Daher ist auch das Integral $\widehat{J}_q F(z)$ wohldefiniert.

[18]Die Glattheit der Formen spielt bei dem Beweis keine Rolle. Es würde auch genügen, daß F stetig differenzierbar ist, wobei dann die Aussagen über die Differenzierbarkeitseigenschaften des Operators im Satz 5.1.6 entsprechend modifiziert werden müssen.

zu (b): Sei $\widetilde{z} \in D^{(m)}$ beliebig fest gewählt. Dann existiert eine kleine Kugel $B(\widetilde{z}, \rho)$ vom Radius ρ um $\widetilde{z}$ mit $B(\widetilde{z}, \rho) \subset\subset D^{(m)}$. Es wird nun gezeigt, daß die parameterabhängigen Integrale $\widehat{I}_{q,j}F(z)$ und $\widehat{J}_q F(z)$ für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ unendlich oft differenzierbar sind.

Für alle $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ ist $|\Phi(\zeta, z)| \gtrsim |r(z)| \geq C > 0$, und es gilt:

$$\widehat{\beta}(\zeta, z) = \|\zeta - z\| + r(\zeta)r(z) \geq \begin{cases} \frac{\rho}{2} & \text{für} \quad \zeta \in D^{(m)} \setminus B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2}) \\ C > 0 & \text{für} \quad \zeta \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2}) \end{cases}$$

Dabei ist die Konstante C unabhängig von $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$. Daher sind der Integralkern $L_{q,j}(\zeta, z) := \overline{\partial}_\zeta \Big(\phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1} \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \Big)$, sowie alle seine partiellen Ableitungen (beliebiger Ordnung) nach z für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ jeweils durch eine von z unabhängige positive Konstante beschränkt. Da F in $\mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)})$ ist, sind der Integrand und sämtliche partiellen Ableitungen des Integranden nach z für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ gleichmäßig Lebesgue-beschränkt. Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden, und $\widehat{I}_{q,j}F(z)$ ist in $\widetilde{z}$ beliebig oft differenzierbar.

Bei dem Integral $\widehat{J}_q F(z)$ können Integration und Differentiation nicht einfach vertauscht werden, denn der Kern ist in z singulär. Daher wird zunächst eine reellwertige Funktion $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\chi \geq 0$, mit kompaktem Träger und den folgenden Eigenschaften gewählt:

$$\chi(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \zeta \in B(\widetilde{z}, \frac{3}{4}\rho) \\ 0 & \text{für} \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus B(\widetilde{z}, \rho) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge K_{q-1} &= \int\limits_{D^{(m)}} \chi(\zeta) F \wedge K_{q-1} + \int\limits_{D^{(m)}} (1 - \chi(\zeta)) F \wedge K_{q-1} \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}^n} \chi(\zeta) F \wedge K_{q-1} + \int\limits_{D^{(m)} \setminus B(\widetilde{z}, \frac{3}{4}\rho)} (1 - \chi(\zeta)) F \wedge K_{q-1} \end{aligned}$$

Für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ ist der Integrand des zweiten Integrals nun unendlich oft partiell nach z differenzierbar, und der Integrand sowie seine sämtlichen partiellen Ableitungen nach z sind gleichmäßig in $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ Lebesgue-beschränkt. Daher dürfen Integration und Differentiation auch hier vertauscht werden.

Das erste Integral erstreckt sich nun über den ganzen $\mathbb{C}^n$. Somit kann die Koordinatentransformation $y := \zeta - z$ durchgeführt werden. Dann hängt der Nenner des Integranden nicht mehr von z ab, und der Integrand, sowie sämtliche partiellen Ableitungen des Integranden (beliebiger Ordnung) nach z existieren für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$

und sind für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\varrho}{2})$ gleichmäßig Lebesgue-beschränkt. Integration und Differentiation dürfen vertauscht werden.

Die Form $\widehat{T}_q F$ ist also in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$.

zu (c): Um zu zeigen, daß der Operator $\widehat{T}_q$ die $\overline{\partial}$-Gleichung auf $D^{(m)}$ löst, wird das Gebiet $D^{(m)}$ mit den komplexen Pseudoellipsoiden

$$D_\delta := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : r_\delta(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} - 1 + \delta < 0 \right\}$$

für $0 < \delta < \delta_1 < \frac{1}{2}\delta_0$ ausgeschöpft. Eine Form $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ ist in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D_\delta}) \cap ker(\overline{\partial})$. Daher ist der Satz 5.1.5 für das komplexe Pseudoellipsoid D_δ gültig, wobei die Randfunktion r in der Definition des Kern allerdings durch die Randfunktion r_δ zu ersetzen ist. Die für $D^{(m)}$ gewählte Funktion ϕ kann auch für alle D_δ mit $\delta < \delta_1 < \frac{1}{2}\delta_0$ zur Fortsetzung der Integralkerne verwendet werden, denn für $\delta < \delta_1$ gilt $\phi \equiv 1$ auf $\{\zeta \in \overline{D^{(m)}} : r_\delta(\zeta) \geq -\frac{1}{2}\delta_0\}$ und $\phi \equiv 0$ auf $\{\zeta \in \overline{D^{(m)}} : r_\delta(\zeta) \leq -2\delta_0\}$ gilt. Ab jetzt wird nur noch $\delta < \delta_1$ betrachtet. Für das komplexe Pseudoellipsoid D_δ werden die entsprechenden Funktionen im Nenner des Integralkerns mit $\widehat{\Phi}_\delta$ und $\widehat{\beta}_\delta$ bezeichnet. Es gilt:

(i) $\widehat{\Phi}_\delta, \widehat{\beta}_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$

(ii) $\widehat{\Phi}_\delta$ und $\widehat{\beta}_\delta$ verschwinden nicht auf $(\overline{D_\delta} \times \overline{D_\delta}) \setminus \Delta b D_\delta$.

(iii) $\widehat{\Phi}_\delta(\zeta, z) = \Phi(\zeta, z) - r_\delta(\zeta) \quad$ (wegen $\partial_\zeta r(\zeta) = \partial_\zeta r_\delta(\zeta)$)

$\widehat{\beta}_\delta(\zeta, z) = \|\zeta - z\|^2 + r_\delta(\zeta)\, r_\delta(z) = \beta(\zeta, z) + r_\delta(\zeta)\, r_\delta(z)$

(iv) Die Funktionen $\widehat{\Phi}_\delta$ und $\widehat{\beta}_\delta$ genügen ebenfalls den Abschätzungen aus Hilfssatz 5.1.3, wobei wieder r durch r_δ ersetzt werden muß.

Nach Satz 5.1.5 liefert der Operator $\widehat{T}^\delta_q : \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D_\delta}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D_\delta)$,

$$\begin{aligned} \widehat{T}^\delta_q F \quad &:= \quad (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \int_{D_\delta} F \wedge \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \, \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{(\widehat{\Phi}_\delta)^{j+1} \, (\widehat{\beta}_\delta)^{n-(j+1)}} \right) - \int_{D_\delta} F \wedge K_{q-1} \\ &=: \quad (-1)^q \sum_{j=0}^{n-q-1} a^j_{q-1} \, \widehat{I}^\delta_{q,j} F - \widehat{J}^\delta_q F, \end{aligned} \tag{12}$$

für $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ eine Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung auf D_δ, d. h. es gilt $\overline{\partial}\widehat{T}^\delta_q F = F$ auf D_δ.

Der Beweis der Gleichung $\overline{\partial}\widehat{T}_q F(z) = F(z)$ für alle $z \in D^{(m)}$ erfolgt durch den Grenzübergang für $\delta \to 0$ in Gleichung (12).

Sei also $\widetilde{z} \in D^{(m)}$ beliebig gewählt. Dann existieren ein δ_2 mit $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ und ein Radius $\rho > 0$ mit $B(\widetilde{z}, \rho) \subset\subset D_\delta$ für alle $0 < \delta < \delta_2$, und es gilt für alle δ mit $0 < \delta < \delta_2$ und alle $z \in B(\widetilde{z}, \rho)$

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\partial} \widehat{T}_q^\delta F(z) = F(z).$$

(Die Konvergenz ist sogar lokal gleichmäßig.) Wenn also die Gleichung

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\partial} \widehat{T}_q^\delta F(\widetilde{z}) = \overline{\partial} \widehat{T}_q F(\widetilde{z}) \tag{13}$$

gezeigt werden kann, ist der Satz bewiesen. Die Aussage (13) ist äquivalent zu

$$|\overline{\partial} \widehat{T}_q^\delta F(\widetilde{z}) - \overline{\partial} \widehat{T}_q F(\widetilde{z})| \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \to 0.$$

$$|\overline{\partial} \widehat{T}_q F(z) - \overline{\partial} \widehat{T}_q^\delta F(z)| \;\leq\; \sum_{j=0}^{n-q-1} a_{q-1}^j |\overline{\partial}(\widehat{I}_{q,j} F(z) - \widehat{I}_{q,j}^\delta F(z))| + \; |\overline{\partial}(\widehat{J}_q F(z) - \widehat{J}_q^\delta F(z))|$$

Es wird nun gezeigt, daß die Terme auf der rechten Seite im Grenzübergang gegen Null streben. Zuerst wird $|\overline{\partial}(\widehat{J}_q F(z) - \widehat{J}_q^\delta F(z))|$ für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\rho}{2})$ betrachtet.

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}(\widehat{J}_q F(z) - \widehat{J}_q^\delta F(z)) &= \overline{\partial}_z \int\limits_{D^{(m)} \setminus D_\delta} F \wedge K_{q-1} = \int\limits_{D^{(m)} \setminus D_\delta} F \wedge \overline{\partial}_z K_{q-1} \\
|\overline{\partial}(\widehat{J}_q F(z) - \widehat{J}_q^\delta F(z))| &= \int\limits_{D^{(m)} \setminus D_\delta} |F \wedge \overline{\partial}_z K_{q-1}| \, dV(\zeta) \\
&\leq C \int\limits_{D^{(m)} \setminus D_\delta} |F(\zeta)| \, dV(\zeta) = C \, \|F\|_{\mathcal{L}^1(D^{(m)} \setminus D_\delta)} \to 0 \;\; \text{für } \delta \to 0
\end{aligned}$$

Für die Kerne der Integrale $\widehat{I}_{q,j} F(z)$ bzw. $\widehat{I}_{q,j}^\delta F(z)$ werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$L_{q,j}(\zeta, z) := \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \, \frac{\widetilde{A}_{q-1}^j(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1} \, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right) \quad \text{und} \quad L_{q,j}^\delta(\zeta, z) := \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \, \frac{\widetilde{A}_{q-1}^j(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{(\widehat{\Phi}_\delta)^{j+1} \, (\widehat{\beta}_\delta)^{n-(j+1)}} \right)$$

Nach den Überlegungen zu (b) dürfen Integration und Differentiation vertauscht werden.

$$|\overline{\partial}(\widehat{I}_{q,j} F(z) - \widehat{I}_{q,j}^\delta F(z))| = \left| \int\limits_{D^{(m)}} F \wedge \overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot, z) - \int\limits_{D_\delta} F \wedge \overline{\partial}_z L_{q,j}^\delta(\cdot, z) \right|$$

$$\leq \; C \int\limits_{D^{(m)} \setminus D_\delta} |F| \, |\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot, z)| \, dV(\zeta) + \int\limits_{D_\delta} |F| \, |\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot, z) - \overline{\partial}_z L_{q,j}^\delta(\cdot, z)| \, dV(\zeta)$$

Für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\varrho}{2})$ ist $|\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot, z)|$ durch eine von z unabhängige Konstante $C > 0$ nach oben beschränkt.

$$\int\limits_{D^{(m)}\setminus D_\delta} |F|\,|\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot,z)|\,dV(\zeta) \leq C \int\limits_{D^{(m)}\setminus D_\delta} |F|\,dV(\zeta) = C\,\|F\|_{\mathcal{L}^1(D^{(m)}\setminus D_\delta)} \to 0 \quad \text{für } \delta \to 0$$

Das andere Integral ist komplizierter. Der Term $|\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot,z) - \overline{\partial}_z L^\delta_{q,j}(\cdot,z)|$ kann nach Berechnen der einzelnen Summanden der $\overline{\partial}_z$-Ableitung von $L_{q,j}(\cdot,z)$ bzw. $L^\delta_{q,j}(\cdot,z)$ durch Zusammenfassen der analogen Terme für $z \in B(\widetilde{z}, \frac{\varrho}{2})$ folgendermaßen nach oben abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} |\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot,z) - \overline{\partial}_z L^\delta_{q,j}(\cdot,z)| \;&\lesssim\; |\widehat{\beta} - \widehat{\beta}_\delta| + |\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi}_\delta| + |\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta} - \overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta}_\delta| \\ &\quad + |\overline{\partial}_z \widehat{\beta} - \overline{\partial}_z \widehat{\beta}_\delta| + |(\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta})(\overline{\partial}_z \widehat{\beta}) - (\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta}_\delta)(\overline{\partial}_z \widehat{\beta}_\delta)| \;\lesssim\; \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{D_\delta} |F|\,|\overline{\partial}_z L_{q,j}(\cdot,z) - \overline{\partial}_z L^\delta_{q,j}(\cdot,z)|\,dV(\zeta) \;&\leq\; C\,\delta \int\limits_{D_\delta} |F|\,dV(\zeta) \\ &=\; C\,\delta\,\|F\|_{\mathcal{L}^1(D^{(m)})} \to 0 \quad \text{für } \delta \to 0 \end{aligned}$$

Also gilt $F(z) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\partial}\widehat{T}^\delta_q F(z) = \overline{\partial}\widehat{T}_q F(z)$ für alle $z \in D^{(m)}$, und die Konvergenz ist sogar lokal gleichmäßig. Damit ist der Satz bewiesen. □

6 Gewichtete Abschätzungen auf den komplexen Pseudoellipsoiden

6.1 Gewichtete Normen auf $D^{(m)}$

Der im vorigen Kapitel konstruierte Lösungsoperator $\widehat{T}_q$ (mit $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$) wird jetzt für Formen $F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$, die der Bedingung $|F(z)| \leq C_F\,(\delta(z))^{-\gamma}$ mit $0 \leq \gamma < 2n$ und einer von F abhängigen Konstante $C_F > 0$ genügen, gegen die Funktion $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ abgeschätzt. Nach Satz 2.4.6 sind solche Formen integrabel. Um die Bedingungen an F etwas formaler und kürzer auszudrücken, werden zunächst einige Bezeichnungen eingeführt.

Definition 6.1.1 (Funktionenräume mit Singularitäten in $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$)
Sei $\delta(z)$ wie in Definition 2.3.2 der euklidische Abstand von der Menge $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$. Dann sind für $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $0 \leq \gamma < 2n$ auf $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$ folgende Normen definiert:

$$\|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} := \sup_{z \in D^{(m)}} |F(z)|\,(\delta(z))^\gamma \quad \textit{für } F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$$

Der Raum der glatten $(0, q)$-Formen auf $D^{(m)}$ mit endlicher $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})}$-Norm sei

$$\mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) := \left\{ F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) : \|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} < \infty \right\}.$$

Bemerkung 6.1.2

(a) Wegen $\gamma < 2n$ gilt nach Satz 2.4.6 $\mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \subset \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)})$.

(b) Die zurückgezogenen Formen $F := B^* f$ für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ erfüllen auf $D^{(m)}$ nach Satz 2.4.4 die Abschätzung $|F(z)|\,\delta(z)^{\gamma(k,m,q)} \leq \widetilde{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$ mit einer nur von k abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_k > 0$. Für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ mit $\gamma(k, m, q) < 2n$ gilt also

$$\|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \leq \widetilde{C}_k\,\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \quad \text{mit } \gamma = \gamma(k, m, q).$$

(c) Die Menge $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ ist eine endliche Teilmenge des Randes $bD^{(m)}$. Sie ist lediglich dadurch ausgezeichnet, daß sie in der speziellen Problemstellung dieser Arbeit als Bild von $\zeta \in \overline{S^{(m)}}$ im Grenzübergang $\|\zeta\| \to \infty$ unter dem Biholomorphismus b auftritt. Die spezielle Gestalt der Menge $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ spielt aber für die Rechnungen in diesem Kapitel keine Rolle. Alle Ergebnisse in diesem Kapitel bleiben daher gültig, wenn statt $\operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ eine beliebige endliche Teilmenge $N \subset bD^{(m)}$ und statt $\delta(z)$ der euklidische Abstand $\delta^{D^{(m)}}_N(z) := \operatorname{dist}(z, N)$ von N betrachtet werden.

6.2 Berechnung der wesentlichen Faktoren des Integralkerns

Als Vorbereitung für die Abschätzungen der Integrale $\widehat{J}_q F(z)$ und $\widehat{I}_{q,j} F(z)$ (mit $j = 0, 1, \ldots, n-q-1$) aus Satz 5.1.6 werden zunächst die wesentlichen Faktoren der Integralkerne berechnet.

Zuerst wird das Integral $\widehat{J}_q F(z)$ betrachtet. Der BMK-Kern genügt der Abschätzung $|K_{q-1}| \lesssim \|\zeta - z\|^{1-2n}$. Daher kann das Integral $\widehat{J}_q F(z)$ mit einer von F unabhängigen Konstante $C > 0$ nach oben abgeschätzt werden durch

$$|\widehat{J}_q F(z)| \leq \int\limits_{D^{(m)}} |F(\zeta) \wedge K_q(\zeta, z)|\, dV(\zeta) \leq C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F(\zeta)|\, dV(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}}.$$

Die Integrale $\widehat{I}_{q,j} F(z)$ sind Integrale über $\widetilde{U} := \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$, da die Abschneidefunktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(D^{(m)})$ auf $D^{(m)} \setminus \widetilde{U}$ verschwindet. Die Kerne der Integrale $\widehat{I}_{q,j} F(z)$ werden wie im Beweis von Satz 5.1.6 mit $L_{q,j}(\zeta, z)$ bezeichnet.

$$\widehat{I}_{q,j} F(z) = \int\limits_{\widetilde{U}} F(\zeta) \wedge L_{q,j}(\zeta, z) \qquad \text{mit} \qquad L_{q,j}(\zeta, z) := \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right)$$

Der Kern $L_{q,j}(\zeta, z)$ wird jetzt für $\zeta \in \widetilde{U}$ berechnet und dann abgeschätzt.[19]

$$\begin{aligned}
L_{q,j}(\zeta, z) &= \overline{\partial}_\zeta \left(\phi(\zeta) \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \right) \\
&= \Bigg((\overline{\partial}_\zeta \phi(\zeta)) \wedge \frac{\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} + \phi(\zeta) \frac{\overline{\partial}_\zeta \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \\
&\qquad - \phi(\zeta) \frac{(j+1)\, (\overline{\partial}_\zeta \widehat{\Phi}) \wedge \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+2}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \\
&\qquad - \phi(\zeta) \frac{(n-(j+1))\, (\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta}) \wedge \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)}{\widehat{\Phi}^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-j}} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\zeta \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta) &= \overline{\partial}_\zeta \Big((\partial_\zeta r) \wedge (\partial_\zeta \beta) \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1} \Big) \\
&= (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta r) \wedge (\partial_\zeta \beta) \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1} \\
&\quad - (\partial_\zeta r) \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta) \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1} + (1 - \delta_{j,0}) \\
&\quad j\, (\partial_\zeta r) \wedge (\partial_\zeta \beta) \wedge (\overline{\partial}_\zeta \overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r) \wedge (\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^{j-1} \wedge (\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta)^{n-q-1-j} \wedge (\overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta)^{q-1}
\end{aligned}$$

[19]Der Ausdruck $\delta_{j,l}$ sei das Kronecker-Symbol: $\delta_{j,l} := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad j \neq l \\ 1 & \text{für} \quad j = l \end{cases}$

$$\overline{\partial}_\zeta \widehat{\Phi} = \overline{\partial}_\zeta \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial r(\zeta)}{\partial \zeta_l} (\zeta_l - z_l) - r(\zeta) \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 r(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_l \partial \zeta_l} (\zeta_l - z_l)\, d\overline{\zeta}_l - \overline{\partial}_\zeta r(\zeta)$$

$$\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta} = \overline{\partial}_\zeta \left(\sum_{l=1}^n |\zeta_l - z_l|^2 + r(\zeta)\, r(z) \right) = \sum_{l=1}^n (\zeta_l - z_l)\, d\overline{\zeta}_l + \big(\overline{\partial}_\zeta r(\zeta)\big)\, r(z)$$

$$\overline{\partial}_\zeta \partial_\zeta \beta = \sum_{l=1}^n d\overline{\zeta}_l \wedge d\zeta_l \qquad \text{und} \qquad \overline{\partial}_z \partial_\zeta \beta = - \sum_{l=1}^n d\overline{z}_l \wedge d\zeta_l$$

Es ergeben sich folgende Abschätzungen auf $\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$:

(i) $|\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)| \lesssim \|\zeta - z\|\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|$

(ii) $|\overline{\partial}_\zeta \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)| \lesssim (\|\zeta - z\| + 1)\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j| + (1 - \delta_{j,0})\, \|\zeta - z\|\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^{j-1}|$

(iii) $|\overline{\partial}_\zeta \widehat{\Phi}| \lesssim \|\zeta - z\| + 1$

(iv) $|\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta}| \lesssim \|\zeta - z\| + |r(z)|$

Nun wird $L_{q,j}(\zeta, z)$ für $\zeta \in \widetilde{U}$ mit (i) bis (iv) und Hilfssatz 5.1.3 abgeschätzt.

$$\begin{aligned}
|L_{q,j}(\zeta, z)| &\lesssim \frac{|\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} + \frac{|\overline{\partial}_\zeta \widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \\
&\quad + \frac{|\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)|\, |\overline{\partial}_\zeta \widehat{\Phi}|}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} + \frac{|\widetilde{A}^j_{q-1}(\partial_\zeta r, \partial_\zeta \beta)|\, |\overline{\partial}_\zeta \widehat{\beta}|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-j}} \\
&\lesssim \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j| (1 + \|\zeta - z\|)}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} + (1 - \delta_{j,0})\, \frac{\|\zeta - z\|\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^{j-1}|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} \\
&\quad + \frac{\|\zeta - z\|\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|\, (\|\zeta - z\| + 1)}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\, \widehat{\beta}^{n-(j+1)}} + \frac{\|\zeta - z\|\, |(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|\, (\|\zeta - z\| + |r(z)|)}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-j}} \\
&\lesssim \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\, \widehat{\beta}^{n-j-\frac{3}{2}}} + \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-j-1}} + \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|}{|\widehat{\Phi}|^{j}\, \widehat{\beta}^{n-j-\frac{1}{2}}} + (1 - \delta_{j,0})\, \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^{j-1}|}{|\widehat{\Phi}|^{j+1}\, \widehat{\beta}^{n-j-\frac{3}{2}}} \\
&\lesssim \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^j|}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\, \widehat{\beta}^{n-j-\frac{3}{2}}} + (1 - \delta_{j,0})\, \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r)^{j-1}|}{|\widehat{\Phi}|^{(j-1)+2}\, \widehat{\beta}^{n-(j-1)-\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Dabei wurden $|\Phi| \gtrsim |r(z)|$ und $\widehat{\beta}^{1/2} \gtrsim |\widehat{\Phi}|$ (vgl. Hilfssatz 5.1.3) für die letzten beiden Umformungen ausgenutzt. Mit $\widehat{\beta} \geq \beta = \|\zeta - z\|^2$ ergibt sich der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 6.2.1
Es seien $1 \leq q \leq n$, $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$, $\widehat{I}_{q,j}F(z)$ und $\widehat{J}_q F(z)$ die in Satz 5.1.6 definierten Integrale und $\widetilde{U} := \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$. Dann

gibt es eine von F unabhängige Konstante $C > 0$, so daß für $j = 0, 1, \ldots, n-q-1$ und alle $z \in D^{(m)}$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$|\widehat{I}_{q,j}F(z)| \leq C \int\limits_{\widetilde{U}} \frac{|F(\zeta)|\,|(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r)^j|\,dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}} + C\,(1-\delta_{j,0}) \int\limits_{\widetilde{U}} \frac{|F(\zeta)|\,|(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r)^{j-1}|\,dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{(j-1)+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2(j-1)-3}}$$

$$|\widehat{J}_q F(z)| \leq C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F(\zeta)|\,dV(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}}$$

Dabei ist zu beachten, daß für $q = n$ die Integrale $\widehat{I}_{q,j}F(z)$ verschwinden. □

Satz 6.2.2

Es seien $1 \leq q \leq n$, $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$, $\widehat{T}_q$ der lineare Operator aus Satz 5.1.6 und $\widetilde{U} := \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$. Dann gilt auf $D^{(m)}$

$$\begin{aligned} |\widehat{T}_q F(z)| \quad &\leq \quad C \sum_{j=0}^{n-q-1} \int\limits_{\widetilde{U}} \frac{|F(\zeta)|\,|(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r)^j|\,dV(\zeta)}{|\widehat{\Phi}|^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}} + C \int\limits_{D^{(m)}} \frac{|F(\zeta)|\,dV(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \\ &=: \quad C \left(\sum_{j=0}^{n-q-1} H^j F(z) + HF(z) \right) \end{aligned}$$

mit einer von F unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Beweis:

Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus dem Hilfssatz 6.2.1. □

Jetzt wird noch eine Abschätzung für $(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r(\zeta))^j$ angegeben.

Hilfssatz 6.2.3 (Abschätzung für $(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r(\zeta))^j$)

Sei $\widetilde{z} \in bD^{(m)}$ und $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ mit $r_\mu(\widetilde{z}) = \frac{\partial r}{\partial \zeta_\mu}(\widetilde{z}) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U(\widetilde{z})$ von $\widetilde{z}$ und eine (von $\widetilde{z}$ abhängige) Konstante $C > 0$, so daß für alle $\zeta \in U(\widetilde{z})$ und für $j = 0, 1, \ldots, n-q-1$ gilt

$$|(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_\zeta r(\zeta))^j| \leq C \sum_{\substack{|I|=j \\ i_l \neq \mu}} \left(\prod_{l=1}^{j} |\zeta_{i_l}|^{2m_{i_l}-2} \right), \tag{14}$$

wobei $I = (i_1, i_2, \ldots, i_j)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n$ und alle $i_l \neq \mu$ sind. Die Koordinate ζ_μ kommt also nicht mehr vor. (Dabei ist definitionsgemäß für $j = 0$ das Produkt $\prod_{l=1}^{0} |\zeta_{i_l}|^{2m_{i_l}-2} = 1$.)

Beweis:

Der Beweis wurde schon in verschiedenen Arbeiten ausgeführt, z. B. in [ChKrMa]. □

6.3 Einige Hilfssätze über Koordinatentransformationen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt werden einige nützliche Hilfssätze über Koordinatentransformationen und Abschätzungen zusammengestellt, die zur Untersuchung der Integrale benötigt werden.

Hilfssatz 6.3.1 (Abschätzung für $|\widehat{\Phi}(\zeta,z)|$)
Sei $M := \max\{m_1,\dots,m_n\}$. Dann gilt für alle $(\zeta,z) \in \overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$:

$$|\widehat{\Phi}(\zeta,z)| \gtrsim -r(\zeta) - r(z) + |\mathrm{Im}\Phi(\zeta,z)| + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^{2m_j-2}|\zeta_j - z_j|^2 + \|\zeta - z\|^{2M}$$

Beweis:
Auf $\overline{D^{(m)}} \times \overline{D^{(m)}}$ gilt nach Hilfssatz 5.1.3 (i):

$$|\widehat{\Phi}(\zeta,z)| \gtrsim -r(\zeta) - r(z) + |\mathrm{Im}\Phi(\zeta,z)| + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^{2m_j-2}|\zeta_j - z_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{2m_j}$$

Für $|\zeta_l - z_l| < 1$ für alle $1 \le l \le n$ und $M := \max\{m_1,\dots,m_n\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{2m_j} \ge \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{2M} \gtrsim \|\zeta - z\|^{2M}.$$

Für $|\zeta_l - z_l| > 1$ für mindestens ein l, $1 \le l \le n$, gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{2m_j} \ge 1 \gtrsim \|\zeta - z\|^{2M},$$

da $D^{(m)}$ ein beschränktes Gebiet ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Hilfssatz 6.3.2
Sei $h \in \mathbb{N}_0$ und $A_h(\zeta,z) := (-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{h} |\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M})$. Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$, jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k+1 \le j$ und für alle $(\zeta,z) \in D^{(m)} \times D^{(m)}$:

$$\frac{(\prod_{l=1}^{j} |\zeta_l|^{2m_l-2})}{(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j} |\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$
$$\lesssim \frac{1}{(A_k(\zeta,z) + (\mathrm{Re}\,(\zeta_{k+1} - z_{k+1}))^2)}\,\frac{(\prod_{l=1}^{k} |\zeta_l|^{2m_l-2})}{(A_k(\zeta,z))^{j+1}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

Beweis:

$$\frac{(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2})}{(-r(\zeta)+|\mathrm{Im}\Phi|+\sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l-z_l|^2+\|\zeta-z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta-z\|^{2n-2j-3}}$$
$$\leq \frac{|\zeta_{k+1}|^{2m_{k+1}-2}}{(A_k(\zeta,z)+|\zeta_{k+1}|^{2m_{k+1}-2}|\zeta_{k+1}-z_{k+1}|^2)}\,\frac{(\prod_{l=1}^{k}|\zeta_l|^{2m_l-2})}{(A_k(\zeta,z))^{j+1}\,\|\zeta-z\|^{2n-2j-3}}$$
$$\leq \frac{1}{(A_k(\zeta,z)+(\mathrm{Re}\,(\zeta_{k+1}-z_{k+1}))^2)}\,\frac{(\prod_{l=1}^{k}|\zeta_l|^{2m_l-2})}{(A_k(\zeta,z))^{j+1}\,\|\zeta-z\|^{2n-2j-3}}$$

Die letzte Umformung ist für $\zeta_{k+1}=0$ trivial. Für $\zeta_{k+1}\neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{|\zeta_{k+1}|^{2m_{k+1}-2}}{(A_k(\zeta,z)+|\zeta_{k+1}|^{2m_{k+1}-2}|\zeta_{k+1}-z_{k+1}|^2)} &\leq \frac{1}{(A_k(\zeta,z)/(|\zeta_{k+1}|^{2m_{k+1}-2})+|\zeta_{k+1}-z_{k+1}|^2)}\\ &\leq \frac{1}{(A_k(\zeta,z)+|\zeta_{k+1}-z_{k+1}|^2)}\\ &\leq \frac{1}{(A_k(\zeta,z)+(\mathrm{Re}\,(\zeta_{k+1}-z_{k+1}))^2)}\end{aligned}$$

Dabei gilt die vorletzte Umformung wegen $|\zeta_{k+1}|<1$ auf $D^{(m)}$. □

Hilfssatz 6.3.3 (Existenz lokaler Koordinaten)
Sei $\widetilde{z}\in\overline{D^{(m)}}$ ein Punkt mit $r_\mu(\widetilde{z})=\frac{\partial r(\widetilde{z})}{\partial\zeta_\mu}\neq 0$ für ein $\mu\in\{1,2,\ldots,n\}$. Dann gibt es eine Umgebung U von $\widetilde{z}$, so daß für jedes $z\in U$ die reellwertigen Funktionen

$$t_1(\zeta):=-r(\zeta),\ t_2(\zeta):=\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta,z),\ t_3(\zeta):=\mathrm{Re}\,(\zeta_1-z_1),\ t_4(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_1-z_1),\ldots,$$
$$t_{2\mu}(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_{\mu-1}-z_{\mu-1}),\ t_{2\mu+1}(\zeta):=\mathrm{Re}\,(\zeta_{\mu+1}-z_{\mu+1}),\ldots,t_{2n}(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_n-z_n)$$

ein reelles Koordinatensystem $t=(t_1,t_2,\ldots,t_{2n})$ auf U bilden. Es existiert eine Konstante $C>0$, so daß für alle $z,\zeta\in U$ die reelle Funktionalmatrix $\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\|\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta)\|\leq C \quad \textit{und} \quad |\det(\mathrm{J}_{\mathbb{R}}(t)(\zeta))|\geq 1/C$$

Beweis:
Ohne Einschränkung sei $\mu=n$. Nach Voraussetzung gilt $dr(\widetilde{z})=\partial r(\widetilde{z})+\overline{\partial}r(\widetilde{z})\neq 0$.

$$\begin{aligned}d_\zeta\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta,\widetilde{z})|_{\zeta=\widetilde{z}} &= \frac{1}{2i}\,d_\zeta\left(\sum_{j=1}^{n}r_j(\zeta)(\zeta_j-\widetilde{z}_j)-\sum_{j=1}^{n}r_{\overline{j}}(\zeta)(\overline{\zeta}_j-\overline{\widetilde{z}}_j)\right)\Bigg|_{\zeta=\widetilde{z}}\\ &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{j=1}^{n}r_j(\widetilde{z})\,d\zeta_j-\sum_{j=1}^{n}r_{\overline{j}}(\widetilde{z})\,d\overline{\zeta}_j\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\partial r(\widetilde{z})-\overline{\partial}r(\widetilde{z})\right)\end{aligned}$$

$$dr(\widetilde{z})\wedge d_\zeta \mathrm{Im}\,\Phi(\zeta,\widetilde{z})|_{\zeta=\widetilde{z}} = \frac{1}{2i}\left(\partial r(\widetilde{z}) + \overline{\partial} r(\widetilde{z})\right)\wedge\left(\partial r(\widetilde{z}) - \overline{\partial} r(\widetilde{z})\right) = i\,\partial r(\widetilde{z})\wedge\overline{\partial} r(\widetilde{z}) \neq 0$$

$$dr(\widetilde{z})\wedge d_\zeta \mathrm{Im}\,\Phi(\widetilde{z},\widetilde{z})\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{n-1}\left(d\zeta_j\wedge d\overline{\zeta}_j\right)\right) = i\,|r_n(\widetilde{z})|^2 d\zeta_n\wedge d\overline{\zeta}_n\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{n-1}\left(d\zeta_j\wedge d\overline{\zeta}_j\right)\right)\neq 0$$

Es gibt also eine Umgebung U von $\widetilde{z}$, auf der $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ für $z = \widetilde{z}$ ein Koordinatensystem ist. Da die Funktionen $t_1, \ldots, t_{2n}$ stetig von z abhängen, bilden $t_1, \ldots, t_{2n}$ nach Verkleinern von U für jedes $z \in U$ ein Koordinatensystem auf U. Die Aussagen über die Funktionalmatrix sind offensichtlich. □

Hilfssatz 6.3.4

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x + i\,y$, $A \in \mathbb{R}$ eine kleine positive Zahl, $N \in \mathbb{R}$, $N > 1$ und $q, l \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq q \leq N$, $0 \leq l \leq N$. Dann gibt es eine von l und q unabhängige Konstante $C > 0$ und eine von l abhängige Konstante $C_l > 0$, so daß für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < R$ gilt:

$$\int\limits_{|z|<R} \frac{|z+w|^l\,dx\,dy}{(A + |z+w|^l|z|^2)^q} \;\leq\; C \begin{cases} C_l\,(q-1)^{-1}\,A^{1-q} & \text{für} \quad q > 1 \\ C_l\,(|\ln(A)| + 1) & \text{für} \quad q = 1 \end{cases}$$

Dabei ist C_l folgendermaßen definiert: $C_l := \begin{cases} l^{-1} & \text{für} \quad l \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad l = 0 \end{cases}$

Beweis:

Dieser Hilfssatz stammt aus der Arbeit [DiFoWi] von Diederich, Fornaess und Wiegerinck. Da der Beweis dort nicht explizit angegeben ist, wird er hier ausgeführt. Die Fälle $l = 0$ und $l > 0$ werden getrennt behandelt.

Für $l = 0$ werden Polarkoordinaten für z mit Radius ρ eingeführt und $s := \rho^2$, $\frac{ds}{d\rho} = 2\rho$, substituiert:

$$\int\limits_{|z|<R} \frac{dx\,dy}{(A + |z|^2)^q} \leq C \int\limits_0^{R^2} \frac{ds}{(A+s)^q} \leq C \begin{cases} (q-1)^{-1}\,A^{1-q} & \text{für} \quad q > 1 \\ (|\ln(A)| + 1) & \text{für} \quad q = 1 \end{cases}$$

Für $l > 0$ wird das Integrationsgebiet zunächst aufgeteilt:

(a) $U_1 := \left\{|z| < R : |z| < \frac{1}{2}|w|\right\}$

(b) $U_2 := \left\{|z| < R : |z + w| < \frac{1}{2}|w|\right\}$

(c) $U_3 := \left\{|z| < R : |z| \geq \frac{1}{2}|w| \quad \text{und} \quad |z + w| \geq \frac{1}{2}|w|\right\}$

(a) $|z+w| \leq |z| + |w| \leq \frac{3}{2}|w|$
$|z+w| \geq |w| - |z| > |w| - \frac{1}{2}|w| = \frac{1}{2}|w|$

$$I_{U_1} := \int\limits_{U_1} \frac{|z+w|^l\,dx\,dy}{(A+|z+w|^l|z|^2)^q} \leq \int\limits_{|z|<R} \frac{(\frac{3}{2}|w|)^l\,dx\,dy}{(A+(\frac{1}{2}|w|)^l|z|^2)^q} \leq C\int\limits_0^R \frac{|w|^l\,\rho\,d\rho}{(A+|w|^l\rho^2)^q}$$

Dabei wurden im zweiten Schritt für z Polarkoordinaten eingeführt und das Winkelintegral ausgerechnet. Nun wird $s := |w|^l\rho^2$, $\frac{ds}{d\rho} = 2|w|^l\rho$, substituiert.

$$I_{U_1} \leq C\int\limits_0^{R^2|w|^l} \frac{ds}{2(A+s)^q} \leq C\begin{cases} (q-1)^{-1}\,A^{1-q} & \text{für} \quad q>1 \\ (|\ln(A)|+1) & \text{für} \quad q=1 \end{cases}$$

(b) Es gilt: $\frac{1}{2}|w| > |z+w| \geq |w| - |z| \implies |z| > \frac{1}{2}|w|$. Für $z' := z+w$ werden Polarkoordinaten mit Radius ρ eingeführt.

$$I_{U_2} := \int\limits_{U_2} \frac{|z+w|^l\,dx\,dy}{(A+|z+w|^l|z|^2)^q} \leq \int\limits_{U_2\setminus\{z'=0\}} \frac{|z'|^{l-2}(\frac{1}{2}|w|)^2\,dx\,dy}{(A+|z'|^l(\frac{1}{2}|w|)^2)^q} \leq C\int\limits_0^R \frac{\rho^{l-2}|w|^2\,\rho\,d\rho}{(A+\rho^l|w|^2)^q}$$

Nun wird die Substitution $s := |w|^2\rho^l$, $\frac{ds}{d\rho} = l|w|^2\rho^{l-1}$, durchgeführt.

$$I_{U_2} \leq C\int\limits_0^{|w|^2R^l} \frac{ds}{l(A+s)^q} \leq C\begin{cases} l^{-1}\,(q-1)^{-1}\,A^{1-q} & \text{für} \quad q>1 \\ l^{-1}\,(|\ln(A)|+1) & \text{für} \quad q=1 \end{cases}$$

(c) $|z| \geq \frac{1}{2}|w| \implies |z+w| \leq |z| + |w| \leq 3|z|$
$|z+w| \geq \frac{1}{2}|w| \implies |z+w| = \frac{1}{3}|z+w| + \frac{2}{3}|z+w| \geq \frac{1}{3}(|z|-|w|) + \frac{2}{3}\frac{1}{2}|w| = \frac{1}{3}|z|$

$$I_{U_3} := \int\limits_{U_3} \frac{|z+w|^l\,dx\,dy}{(A+|z+w|^l|z|^2)^q} \leq \int\limits_{U_3} \frac{(3|z|)^l\,dx\,dy}{(A+(\frac{1}{3}|z|)^l|z|^2)^q} \leq C\int\limits_{|z|<R} \frac{|z|^l\,dx\,dy}{(A+|z|^{l+2})^q}$$

Nun werden für z Polarkoordinaten mit Radius ρ eingeführt und $s := \rho^{l+2}$, $\frac{ds}{d\rho} = (l+2)\rho^{l+1}$, substituiert.

$$I_{U_3} \leq C\int\limits_0^R \frac{\rho^{l+1}\,d\rho}{(A+\rho^{l+2})^q} \leq C\int\limits_0^{R^{l+2}} \frac{ds}{(A+s)^q} \leq C\begin{cases} (q-1)^{-1}\,A^{1-q} & \text{für } q>1 \\ (|\ln(A)|+1) & \text{für } q=1 \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Hilfssatz 6.3.5
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq C$ und $A \in \mathbb{R}$ eine kleine positive Zahl. Dann gibt es eine von A und C unabhängige Konstante $\widetilde{C} > 0$, so daß gilt:

$$\int\limits_0^C \frac{dx}{A + x^2} \leq \widetilde{C} A^{-1/2}$$

Beweis:
Es wird die Substitution $x = \sqrt{A}\, s$, $dx = \sqrt{A}\, ds$, durchgeführt.

$$\int\limits_0^C \frac{dx}{A+x^2} \leq \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{A}\, ds}{A + As^2} = A^{-1/2} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = A^{-1/2} \arctan{(s)} \,|_0^\infty = \frac{\pi}{2} A^{-1/2}$$

□

Hilfssatz 6.3.6
Seien $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, R eine positive reelle Konstante, $p, r \in \mathbb{R}$ mit $p, r > 1$, U eine offene Menge im $\mathbb{R}^{n-1}$ und $A_1(x')$, $A_2(x')$ reellwertige Funktionen in den ersten $(n-1)$ Variablen $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, die auf U definiert sind und dort nur positive Werte annehmen. Das Integral

$$I := \int\limits_U \left(\int\limits_{0<x_n<R} \frac{dx_n}{(A_1(x') + x_n)^p \,(A_2(x') + x_n)^r} \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

existiere. Dann gibt es eine von p und r unabhängige Konstante $C > 0$, so daß für alle $\mu \in [\,0, 1]$ gilt:

$$I \leq C \,\max\left\{(p-1)^{-1},\, (r-1)^{-1}\right\} \int\limits_U \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-\mu}\,(A_2(x'))^{r-1+\mu}}$$

Beweis:
Für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ ist die Behauptung offenbar wahr, denn nach dem Weglassen von x_n in jeweils einem der beiden Terme im Nenner ergibt die Integration über x_n das gewünschte Ergebnis. Das Integrationsgebiet wird nun aufgeteilt:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in U : A_1(x') \leq A_2(x')\} \\ U_2 &:= \{x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in U : A_1(x') > A_2(x')\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{U_1}\left(\int\limits_{0<x_n<R}\frac{dx_n}{(A_1(x')+x_n)^p\,(A_2(x')+x_n)^r}\right)dx_1\dots dx_{n-1}\\
&\le \int\limits_{U_1}\left(\int\limits_{0<x_n<R}\frac{dx_n}{(A_1(x')+x_n)^p\,(A_2(x'))^r}\right)dx_1\dots dx_{n-1}\\
&\le C\,(p-1)^{-1}\int\limits_{U_1}\frac{dx_1\dots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-1}\,(A_2(x'))^r}\\
&= C\,(p-1)^{-1}\int\limits_{U_1}\frac{(A_1(x'))^{1-\mu}\,dx_1\dots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-\mu}\,(A_2(x'))^r}\\
&= C\,(p-1)^{-1}\int\limits_{U_1}\frac{(A_1(x'))^{1-\mu}}{(A_2(x'))^{1-\mu}}\,\frac{dx_1\dots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-\mu}\,(A_2(x'))^{r-1+\mu}}\\
&\le C\,(p-1)^{-1}\int\limits_{U_1}\frac{dx_1\dots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-\mu}\,(A_2(x'))^{r-1+\mu}}
\end{aligned}
$$

Bei der Integration über U_2 geht man analog vor. Durch Weglassen von x_n in dem Term $(A_1(x')+x_n)$, Integration über x_n und Erweitern mit $(A_2(x'))^\mu$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{U_2}\left(\int\limits_{0<x<R}\frac{dx_n}{(A_1(x')+x_n)^p\,(A_2(x')+x_n)^r}\right)dx_1\dots dx_{n-1}\\
&\qquad\le C\,(r-1)^{-1}\int\limits_{U_2}\frac{dx_1\dots dx_{n-1}}{(A_1(x'))^{p-\mu}\,(A_2(x'))^{r-1+\mu}}
\end{aligned}
$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

6.4 Abschätzung des Integral-Lösungsoperators

Jetzt sollen die Integrale $H^j F(z)$ für $j = 0, 1, \ldots, n-q-1$ und $HF(z)$ aus Satz 6.2.2 für Formen $F \in \mathcal{B}^{\gamma}_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ (mit $0 \leq \gamma < 2n$ und $1 \leq q \leq n$) abgeschätzt werden. Die Formen F erfüllen also die Wachstumsbeschränkung

$$\sup_{z \in D^{(m)}} |F(z)|(\delta(z))^{\gamma} := \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma}(D^{(m)})} < \infty. \tag{15}$$

Es wird an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß $\delta(z)$ genauso gut die Abstandsfunktion von einer beliebigen anderen endlichen Teilmenge N in $bD^{(m)}$ sein könnte. Auf die nachfolgenden Rechnungen hat das keinen Einfluß.

Aus (15) folgt für $F \in \mathcal{B}^{\gamma}_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $0 \leq \gamma < 2n$, $1 \leq q \leq n$

$$\begin{aligned} H^j F(z) &\leq \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma}(D^{(m)})} \int\limits_{\widetilde{U}} \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_{\zeta} r)^j|\, dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma}\, |\widehat{\Phi}|^{j+2}\, \|\zeta - z\|^{2n-2j-3}} =: \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma}(D^{(m)})}\, \widehat{H}^{\gamma,j}(z) \\ HF(z) &\leq \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma}(D^{(m)})} \int\limits_{D^{(m)}} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma}\, \|\zeta - z\|^{2n-1}} =: \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma}(D^{(m)})}\, \widehat{H}^{\gamma}(z) \end{aligned}$$

mit $\widetilde{U} = \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$ und $j = 0, 1, \ldots, n-q-1$.

Bevor die Integrale $\widehat{H}^{\gamma}(z)$ und $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$ abgeschätzt werden, wird das Problem zunächst noch etwas vereinfacht:

Es gibt ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$ mit $\{\zeta \in D^{(m)} : \mathrm{dist}(\zeta, bD^{(m)}) \leq \widetilde{\varepsilon}\} \subset \widetilde{U}$, so daß für alle $z \in bD^{(m)}$ auf der Kugel $B(z, \widetilde{\varepsilon})$ Koordinaten wie im Hilfssatz 6.3.3 existieren und daß auf $B(z, \widetilde{\varepsilon})$ die Abschätzung (14) aus Hilfssatz 6.2.3 gilt. Ohne Einschränkung darf $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$ mit dem ε aus der Definition 2.3.1 von $V = \bigcup_{\lambda=0}^{m_n-1} B(z^{(\lambda)}, \varepsilon) \cap (\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}))$ angenommen werden.

Es genügt für die Integralabschätzungen, das Integrationsgebiet auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$ zu beschränken. Für $\zeta \in D^{(m)} \setminus B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ gilt nämlich $\|\zeta - z\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ und nach Hilfssatz 6.3.1 ist $|\Phi(\zeta, z)| \gtrsim \|\zeta - z\|^{2M}$. Die Funktion $\delta(\zeta)^{-\gamma}$ ist aber für $0 \leq \gamma < 2n$ integrabel. Außerdem reicht es, die Integrale für $z \in D^{(m)}$ mit $\mathrm{dist}(z, bD^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ abzuschätzen, denn für z mit $\mathrm{dist}(z, bD^{(m)}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt $|\Phi(\zeta, z)| \gtrsim |r(z)| \gtrsim \frac{\varepsilon}{2}$ und für $\zeta \in B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$ gilt immer $\|\zeta - z\| \geq \frac{\varepsilon}{4}$ oder $\delta(\zeta) \geq \frac{\varepsilon}{4}$. Also können die Integrale für z mit $\mathrm{dist}(z, bD^{(m)}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ gegen eine nur von $\gamma < 2n$ abhängige Konstante $C_{\gamma} = C\,(2n-\gamma)^{-1} > 0$ nach oben abgeschätzt werden.

Die Punkte z in der Nähe von einem $z^{(\lambda)} \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ sind offenbar die kritischsten Punkte. Es genügt also die Integrale $\widehat{H}^{\gamma}(z)$ und $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$ für $z \in D^{(m)}$ mit $\delta(z) < \frac{\varepsilon}{2}$

abzuschätzen. Zu jedem $z \in D^{(m)}$ mit $\delta(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es genau einen Punkt $p := z^{(\lambda_0)}$ in $Sing(D^{(m)})$ (mit $\lambda_0 \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$), so daß für alle $\zeta \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ gilt:

$$\|\zeta - p\| = \delta(\zeta) < \|\zeta - z^{(\lambda)}\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \neq \lambda_0$$

Nach gegebenenfalls weiterem Verkleinern von ε gilt für alle $z \in D^{(m)}$ mit $\delta(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ die Bedingung $r_n(\zeta) \neq 0$. Die Koordinaten aus Hilfssatz 6.3.3 existieren auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2})$, wobei $\mu = n$ ist. Außerdem gilt Hilfssatz 6.2.3 mit $\mu = n$. Dabei kann die positive Konstante C in Hilfssatz 6.2.3 für alle $\widetilde{z} \in bD^{(m)}$ (mit $\delta(\widetilde{z}) < \frac{\varepsilon}{2}$) einheitlich gewählt werden. Ohne Einschränkung genügt es, in der Abschätzung (14) in Hilfssatz 6.2.3 nur einen Summanden zu betrachten. Es gibt also eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $j = 0, 1, \ldots, n-2$ und alle $z \in D^{(m)}$ mit $\delta(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$ (mit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq n-1$) folgende Abschätzung gilt:

$$|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r(\zeta))^j| \leq C \prod_{l=1}^{j} |\zeta_{i_l}|^{2m_{i_l}-2}$$

Bemerkung 6.4.1 (beliebige endliche Teilmenge N von $bD^{(m)}$)
Für den Fall einer beliebigen endlichen Menge N in $bD^{(m)}$ mit $\delta_N^{D^{(m)}}(z) := \text{dist}(z, N)$ gilt entsprechend, daß nur Punkte z mit $\delta_N^{D^{(m)}}(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ (mit einem geeigneten kleinen ε) betrachtet werden müssen und daß das Integrationsgebiet auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$ eingeschränkt werden darf. Nach weiterer Verkleinerung von ε kann angenommen werden, daß zu jedem $z \in D^{(m)}$ mit $\delta_N^{D^{(m)}}(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ genau ein Punkt $p \in N$ existiert, so daß für alle $\zeta \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ die Gleichung $\delta_N^{D^{(m)}}(\zeta) = \|\zeta - p\|$ gilt. Auch die Aussage in Hilfssatz 6.3.3 über die Existenz lokaler Koordinaten (auf $B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$) und die Abschätzung für $|(\overline{\partial}_{\zeta,T} \partial_\zeta r(\zeta))^j|$ gelten, wobei allerdings gegebenenfalls für jedes $p \in N$ auf $B(p, \varepsilon) \cap D^{(m)}$ jeweils eine andere Koordinate μ ausgezeichnet ist.

Bemerkung 6.4.2 (Notation)
Von nun an wird folgende Notation benutzt:

(a) Ist $I(z) = \int_D g(\zeta, z)\, dV(\zeta)$ ein parameterabhängiges Integral über eine Menge $D \subset \mathbb{C}^n$, und ist $U \subset D$, so soll $I_U(z) := \int_U g(\zeta, z)\, dV(\zeta)$ bezeichnen.

(b) Durch das in der Einleitung eingeführte Zeichen $\lesssim$ werden im folgenden nur noch die Konstanten unterdrückt, die nicht von γ abhängen.

(c) Es sei $[\gamma] := \sup\{n : n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \leq \gamma\}$.

Satz 6.4.3 (Abschätzung des Integrals mit BMK-Kern)
Es gibt es eine Konstante $C > 0$ und eine nur von $\gamma \in [0, 2n)$ abhängige Konstante $C_{\gamma,n} > 0$, so daß für alle $\gamma \in [0, 2n)$ und alle $z \in D^{(m)}$ die Abschätzung

$$\widehat{H}^\gamma(z) := \int\limits_{D^{(m)}} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^\gamma \, \|\zeta - z\|^{2n-1}} \;\leq\; C \begin{cases} C_{\gamma,n} & \text{für} \quad \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1) & \text{für} \quad \gamma = 1 \\ C_{\gamma,n}\, \delta(z)^{1-\gamma} & \text{für} \quad 1 < \gamma < 2n \end{cases}$$

gilt, wobei die Konstante $C_{\gamma,n}$ wie folgt gegeben ist:

$$C_{\gamma,n} := \begin{cases} \max\{|1-\gamma|^{-1}, \, (2n-\gamma)^{-1}\} & \text{für} \quad \gamma \neq 1 \\ 1 & \text{für} \quad \gamma = 1 \end{cases}$$

Beweis:
Ohne Einschränkung sei $\delta(z) < \frac{\varepsilon}{2}$, und es wird über $U(z) := B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \cap D^{(m)}$ integriert. Dann gibt es zu jedem z genau ein $p \in \operatorname{Sing}(\overline{D^{(m)}})$, so daß für alle $\zeta \in U(z)$ die Gleichung $\delta(\zeta) = \|\zeta - p\|$ gilt. Das Integrationsgebiet $U(z)$ wird nun aufgeteilt:

$$U_1 := \left\{\zeta \in U(z) : \|\zeta - z\| \leq \tfrac{1}{2}\delta(z)\right\}$$
$$U_2 := \left\{\zeta \in U(z) : \|\zeta - z\| > \tfrac{1}{2}\delta(z)\right\}$$

Zunächst wird das Integral über U_1 betrachtet. Aus $\|\zeta - z\| \leq \frac{1}{2}\delta(z)$ folgt

$$\delta(\zeta) = \|\zeta - p\| \geq \|z - p\| - \|\zeta - z\| \geq \delta(z) - \tfrac{1}{2}\delta(z) = \tfrac{1}{2}\delta(z).$$

$$\widehat{H}^\gamma_{U_1}(z) = \int\limits_{U_1} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^\gamma \, \|\zeta - z\|^{2n-1}} \lesssim \delta(z)^{-\gamma} \int\limits_{U_1} \frac{dV(\zeta)}{\|\zeta - z\|^{2n-1}} \lesssim \delta(z)^{-\gamma} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\delta(z)} d\rho \lesssim \delta(z)^{1-\gamma}$$

Dabei wurden in der letzten Zeile Polarkoordinaten um z mit Radius ρ eingeführt. Das Integrationsgebiet U_2 wird noch einmal aufgeteilt:

$$V_1 := \left\{\zeta \in U(z) : \|\zeta - z\| > \tfrac{1}{2}\delta(z) \quad \text{und} \quad \delta(\zeta) \leq \tfrac{3}{2}\delta(z)\right\}$$
$$V_2 := \left\{\zeta \in U(z) : \|\zeta - z\| > \tfrac{1}{2}\delta(z) \quad \text{und} \quad \delta(\zeta) > \tfrac{3}{2}\delta(z)\right\}$$

$$\widehat{H}^\gamma_{V_1}(z) = \int\limits_{V_1} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^\gamma \, \|\zeta - z\|^{2n-1}} \lesssim \delta(z)^{-(2n-1)} \int\limits_{V_1} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^\gamma}$$

Nun werden Polarkoordinaten um p gewählt. Da $\gamma < 2n$ ist, existiert das Integral.

$$\widehat{H}^\gamma_{V_1}(z) \lesssim \delta(z)^{-(2n-1)} \int\limits_0^{\frac{3}{2}\delta(z)} \rho^{2n-1-\gamma} \, d\rho \lesssim (2n-\gamma)^{-1} \, \delta(z)^{1-\gamma}$$

Auf V_2 gilt $\|\zeta - z\| \geq \|\zeta - p\| - \|p - z\| = \frac{1}{3}\delta(\zeta) + \big(\frac{2}{3}\delta(\zeta) - \delta(z)\big) > \frac{1}{3}\delta(\zeta)$.

$$\widehat{H}^{\gamma}_{V_2}(z) = \int\limits_{V_2} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma}\,\|\zeta - z\|^{2n-1}} \lesssim \int\limits_{V_2} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma+2n-1}} \lesssim \int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)}^{C} \rho^{-\gamma}\,d\rho$$

$$\lesssim \begin{cases} (1-\gamma)^{-1} & \text{für} \quad \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1) & \text{für} \quad \gamma = 1 \\ (\gamma - 1)^{-1}\,\delta(z)^{1-\gamma} & \text{für} \quad 1 < \gamma < 2n \end{cases}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 6.4.4 (Abschätzungen der Integrale $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$)
Seien $j = 0, 1, \ldots, n-2$, $0 \leq \gamma < 2n$ und $\widetilde{U} = \{\zeta \in D^{(m)} : r(\zeta) > -2\delta_0\}$. Weiter seien folgende von γ und j abhängige positive Konstanten definiert:

$$\widetilde{C}_{\gamma} := \begin{cases} \max\{(\gamma - [\gamma])^{-1},\, (1 - (\gamma - [\gamma]))^{-1}\} & \textit{für} \quad \gamma \neq [\gamma] \\ 1 & \textit{für} \quad \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

$$\widetilde{C}^{(j)}_{\gamma} := \begin{cases} \max\{|2n - 2j - 2 - \gamma|^{-1},\, |1 - \gamma|^{-1}\} & \textit{für } \gamma \neq 2n - 2j - 2 \textit{ und } \gamma \neq 1 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) := \int\limits_{\widetilde{U}} \frac{|(\overline{\partial}_{\zeta,T}\partial_{\zeta} r)^j|\,dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma}\,|\widehat{\Phi}|^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

für $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ und für $\gamma \in [\,0, 2n)$ auf $D^{(m)}$ die folgenden Abschätzungen erfüllt:

(a) Für $[\gamma] \leq 2n - 2j - 3$ gilt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \leq C \begin{cases} (\widetilde{C}^{(j)}_{\gamma})^2 & \textit{für } \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2 & \textit{für } \gamma = 1 \\ \widetilde{C}^{(j)}_{\gamma}\,(|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}^{(j)}_{\gamma})\,\delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für } \gamma > 1 \end{cases}$$

(b) Für ($2n - 2j - 3 < [\gamma] \leq 2n - 2$ und $\gamma \neq [\gamma]$) gilt mit $\widetilde{\jmath}(\gamma) := (2n - [\gamma] - 2)/2$:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \leq C \begin{cases} (|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}_{\gamma})\,\delta(z)^{1-\gamma} \quad \textit{für } (\ M = 1 \textit{ und } [\gamma] \leq 2n - 3\ ) \\ \widetilde{C}_{\gamma}\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma)+1)} \quad \textit{für} \begin{cases} (\ \gamma - [\gamma] \geq \frac{(M-1)}{(2M-1)},\ M \neq 1 \\ \textit{und } [\gamma] \leq 2n - 3\ ) \end{cases} \\ (\widetilde{C}_{\gamma})^2\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} \quad \textit{für} \begin{cases} (\ \gamma - [\gamma] \leq \frac{(M-1)}{(2M-1)}\ ) \\ \textit{oder } (\ [\gamma] = 2n - 2\ ) \end{cases} \end{cases}$$

Für ($2n-2j-3<[\gamma]\leq 2n-2$ *und* $\gamma=[\gamma]$) *gilt mit* $\widetilde{\jmath}(\gamma):=(2n-[\gamma]-2)/2$*:*

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z)\leq C\begin{cases}(|\ln(\delta(z))|+1)\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \textit{für}\begin{cases}(\ j\neq\widetilde{\jmath}(\gamma)\ )\ \ \textit{oder}\\ (\ [\gamma]\leq 2n-3\ \textit{und}\ M=1\ )\end{cases}\\ (|\ln(\delta(z))|+1)^2\,\delta(z)^{1-\gamma}\quad \textit{für} & \begin{cases}(\ [\gamma]\leq 2n-3,\ j=\widetilde{\jmath}(\gamma)\ \textit{und}\ M\neq 1\ )\\ \textit{oder}\ \ (\ [\gamma]=2n-2\ \textit{und}\ j=\widetilde{\jmath}(\gamma)\ )\end{cases}\end{cases}$$

(c) Für $[\gamma]=2n-1$ *gilt:*

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z)\leq C\begin{cases}\widetilde{C}_\gamma\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2j+2)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \textit{für}\ \gamma\neq[\gamma]\\ (|\ln(\delta(z))|+1)\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2j+2)} & \textit{für}\ \gamma=[\gamma]\end{cases}$$

Beweis:
Es genügt für $p:=z^{(\lambda)}$, $z\in B(p,\frac{\varepsilon}{2})$ und $U=U(z):=B(z,\frac{\varepsilon}{2})\cap D^{(m)}\subset\widetilde{U}$ die Integrale $\widehat{H}_U^{\gamma,j}(z)$ abzuschätzen. Dann gilt auf U insbesondere $\delta(\zeta)=\|\zeta-p\|$. Aus Hilfssatz 6.2.3 und Hilfssatz 6.3.1 folgt

$$\widehat{H}_U^{\gamma,j}(z)\lesssim\int\limits_{U(z)}\frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_{i_l}|^{2m_{i_l}-2})\,dV(\zeta)}{(-r(\zeta)+|\mathrm{Im}\Phi|+\sum_{l=1}^{j}|\zeta_{i_l}|^{2m_{i_l}-2}|\zeta_{i_l}-z_{i_l}|^2+\|\zeta-z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta-z\|^{2n-2j-3}}$$

mit $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_j\leq n-1$. Nach Umnumerierung der Koordinaten $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_{n-1}$ kann ohne Einschränkung $i_l=l$ angenommen werden. Dadurch geht allerdings die Anordnung der m_l verloren. Da diese Anordnung aber im Beweis nicht ausgenutzt wird, ist das nicht schlimm. Ab jetzt sei also $i_l=l$.

Auf U existieren nach Hilfssatz 6.3.3 folgende reelle Koordinatensysteme:

(a) $s_1(\zeta):=-r(\zeta)$, $s_2(\zeta):=\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta,z)$,
$s_3(\zeta):=\mathrm{Re}\,(\zeta_1-z_1)$, $s_4(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_1-z_1),\ldots,$ $s_{2n}(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_{n-1}-z_{n-1})$

(b) $\widetilde{s}_1(\zeta):=-r(\zeta)$, $\widetilde{s}_2(\zeta):=\mathrm{Im}\,\Phi(\zeta,z)-\mathrm{Im}\,\Phi(p,z)$,
$\widetilde{s}_3(\zeta):=\mathrm{Re}\,(\zeta_1-p_1)$, $\widetilde{s}_4(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_1-p_1),\ldots,$ $\widetilde{s}_{2n}(\zeta):=\mathrm{Im}\,(\zeta_{n-1}-p_{n-1})$

Die Koordinaten der beiden Systeme können auch gemischt werden, sofern nur gleich numerierte Koordinaten gegeneinander ausgetauscht werden.

In diesem Beweis wird beim Abschätzen der Integrale immer ein reelles Koordinatensystem $t=(t_1,t_2,\ldots,t_{2n})$ benutzt, das aus den Koordinaten von $s=(s_1,s_2,\ldots,s_{2n})$ und $\widetilde{s}=(\widetilde{s}_1,\widetilde{s}_2,\ldots,\widetilde{s}_{2n})$ zusammengestellt wird. Die zugeordneten komplexen Koordinaten werden mit $v_l:=t_{2l-1}+i\,t_{2l}$ für $l=1,\ldots,n$ bezeichnet. Das Integrationsgebiet U wird aufgeteilt in

$$U_1:=\left\{\zeta\in U:\|\zeta-z\|\leq\tfrac{1}{2}\delta(z)\right\}\quad\text{und}\quad U_2:=\left\{\zeta\in U:\|\zeta-z\|>\tfrac{1}{2}\delta(z)\right\}.$$

Fall 1: $U_1 := \left\{\zeta \in U : \|\zeta - z\| \leq \frac{1}{2}\delta(z)\right\}$

Dann gilt $\delta(\zeta) = \|\zeta - p\| \geq \|z-p\| - \|\zeta - z\| \geq \delta(z) - \frac{1}{2}\delta(z) = \frac{1}{2}\delta(z)$.

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_1}(z) \lesssim \int\limits_{U_1} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\left(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}\right) dV(\zeta)}{\left(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M}\right)^{j+2}\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-\gamma}\int\limits_{U_1} \frac{\left(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}\right) dV(\zeta)}{\left(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M}\right)^{j+2}\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

Es werden nun reelle Koordinaten $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ mit $t_l := s_l$ für $l = 1, \ldots, 2n$ gewählt. Weiter seien $t' := (t_3, \ldots, t_{2j+2})$ und $t'' := (t_{2j+3}, \ldots, t_{2n})$. Es wird erst über t_1, t_2 und danach mit Hilfssatz 6.3.4 über die Koordinaten $t_3, \ldots, t_{2j+2}$ (also über die komplexen Koordinaten $v_2, \ldots, v_{j+1}$) integriert:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_1}(z) \lesssim \delta(z)^{-\gamma} \int\limits_{\substack{\|(t',t'')\| \leq \frac{1}{2}\delta(z)\\ 0<t_1,\,|t_2|<C}} \frac{\left(\prod_{l=1}^{j}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}\right) dt_1\, dt_2\, d\sigma_{2j}(t')\, d\sigma_{2n-2j-2}(t'')}{\left(t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{j}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2 + \|t''\|^{2M}\right)^{j+2}\|t''\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \cdots \lesssim \delta(z)^{-\gamma} \int\limits_{\|t''\| \leq \frac{1}{2}\delta(z)} \frac{(|\ln(\|t''\|)| + 1)\, d\sigma_{2n-2j-2}(t'')}{\|t''\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-\gamma} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\delta(z)} \frac{(|\ln(\rho)| + 1)\, \rho^{2n-2j-3}\, d\rho}{\rho^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-\gamma}\,\delta(z)\,(|\ln(\delta(z))| + 1) \lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{1-\gamma}$$

Fall 2: $U_2 := \left\{\zeta \in U : \|\zeta - z\| > \frac{1}{2}\delta(z)\right\}$

Der zweite Fall ist komplizierter. Da $\delta(\zeta)^{\gamma}$ Null werden kann, werden $([\gamma] + 1)$ p-zentrierte Koordinaten benötigt. Um mit einem ähnlichen Vorgehen wie oben so gute Abschätzungen wie im Fall 1 zu bekommen, müssen noch $(2j + 2)$ weitere Koordinaten übrig sein, die als $s_1, \ldots, s_{2j+2}$ gewählt werden dürfen. Das Integral

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_2}(z) \lesssim \int\limits_{U_2} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\left(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}\right) dV(\zeta)}{\left(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M}\right)^{j+2}\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

wird also voraussichtlich nur für $2j + 2 \leq 2n - [\gamma] - 1$ genauso gute Abschätzungen wie $\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_1}(z)$ erfüllen. Für größeres j sind für ein von der Einheitskugel verschiedenes komplexes Pseudoellipsoid $D^{(m)}$ schlechtere Abschätzungen zu erwarten, weil $|\widehat{\Phi}(\zeta, z)| \gtrsim \|\zeta - z\|^{2M}$ mit $M > 1$ ist. Um möglichst gute Ergebnisse zu bekommen, wird das Integral über U_2 mit zwei verschiedenen Verfahren behandelt. Dabei werden die im Satz definierten Konstanten $\widetilde{C}_{\gamma}$ und $\widetilde{C}^{(j)}_{\gamma}$ benutzt.

Beim Abschätzen von $\widehat{H}_{U_2}^{\gamma,j}(z)$ werden folgende Fälle unterschieden, in denen jeweils etwas unterschiedliche Koordinaten gewählt werden müssen:

(a) $2j + 2 \le 2n - [\gamma] - 1$

(b) $2j + 2 > 2n - [\gamma] - 1$ und $[\gamma] \le 2n - 3$

(c) $[\gamma] = 2n - 2$

(d) $[\gamma] = 2n - 1$

Die Bedingung $2j+2 > 2n-[\gamma]-1$ entfällt in den beiden letzten Fällen, da sie hier trivialerweise immer erfüllt ist. Weiter ist zu beachten, daß aus $2j+2 > 2n-[\gamma]-1$ und $j \le n-2$ die Bedingung $[\gamma] > 2n-2j-3 \ge 1$ folgt. Insbesondere gilt also in den Fällen (b) bis (d) immer $\gamma \ge 2$.

1. Verfahren:

Dieses Vorgehen ist in den Fällen (a) und (b) sinnvoll. In den Fällen (c) und (d) ergeben sich mit dem zweiten Verfahren bessere Ergebnisse. Um die Fälle (a) und (b) gemeinsam behandeln zu können, wird zunächst ein Parameter $j(\gamma)$ eingeführt:

Fall (a): $j(\gamma) := j$

Fall (b): $j(\gamma) := (2n - [\gamma] - 3)/2$

Es gilt immer $j \ge j(\gamma) \ge 0$. Im Fall (b) sind zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $j - j(\gamma) \ge 1/2 > 0$

(ii) $2n - 2j(\gamma) - 3 = [\gamma]$

(iii) $j \ge 1$, denn es gilt $2j > 2n - 3 - [\gamma] \ge 0$ für $[\gamma] \le 2n - 3$.

Im Fall (a) und (b) werden auf U_2 die Koordinaten $t_l := s_l$ für $l = 1, \ldots, 2j(\gamma)+2$ und $t_l := \widetilde{s}_l$ für $l = 2j(\gamma)+3, \ldots, 2n$ gewählt. Weiter bezeichnen $t' := (t_3, \ldots, t_{2[j(\gamma)]+2})$ und $t'' := (t_{2j(\gamma)+3} \ldots, t_{2n})$. Es ist zu beachten, daß t' für $[j(\gamma)] = 0$ entfällt und daß im Fall (b) für $[\gamma]$ gerade $2j(\gamma) = 2[j(\gamma)] + 1$ gilt. Dieser Fall muß etwas anders behandelt werden als die übrigen Fälle, in denen jeweils $j(\gamma) = [j(\gamma)]$ gilt.

Das Integrationsgebiet U_2 wird noch einmal aufgeteilt:

$$V_1 := \left\{\zeta \in U : \|\zeta - z\| > \tfrac{1}{2}\delta(z) \quad \text{und} \quad \|t''\| \le \tfrac{3}{2}\,\delta(z)\right\}$$

$$V_2 := \left\{\zeta \in U : \|\zeta - z\| > \tfrac{1}{2}\delta(z) \quad \text{und} \quad \|t''\| > \tfrac{3}{2}\,\delta(z)\right\}$$

Zuerst wird das Integral über V_1 betrachtet:

Sei $j(\gamma) = [j(\gamma)]$, also $j(\gamma) = j$ (Fall (a)) oder $j(\gamma) = (2n - [\gamma] - 3)/2$ und $[\gamma]$ ungerade (Fall (b) mit $[j(\gamma)] = j(\gamma)$). Dann ist $t = (t_1, t_2, t', t'')$. Es gilt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{V_1}(z) \lesssim \int\limits_{V_1} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2})\,dV(\zeta)}{(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \int\limits_{V_1} \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]}|\zeta_l|^{2m_l-2})\,dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^{\gamma}\,(-r(z) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \delta(z)^{2M})^{j+2}\,\delta(z)^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3} \int\limits_{\substack{\|t'\|<C \\ \|t''\|\le\frac{3}{2}\delta(z)}} \int_0^C\int_0^C \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\,dt_1\,dt_2\,d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma}\,(t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M})^{j+2}}$$

Nun wird über die Koordinaten t_1 und t_2 und danach für $[j(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über die Koordinaten $t_3, \ldots, t_{2[j(\gamma)]+2}$ (also über die komplexen Koordinaten $v_2, \ldots, v_{[j(\gamma)]+1}$) integriert.

$$\int\limits_{\|t''\|\le\frac{3}{2}\delta(z)} \int\limits_{\|t'\|<C} \int_0^C\int_0^C \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\,dt_1\,dt_2\,d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma}\,(t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M})^{j+2}}$$

$$\lesssim \int\limits_{\|t''\|\le\frac{3}{2}\delta(z)} \int\limits_{\|t'\|<C} \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\,d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma}\,(\sum_{l=1}^{[j(\gamma)]}|v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M})^{j}}$$

$$\lesssim \begin{cases} (|\ln(\delta(z))| + 1) \displaystyle\int\limits_{\|t''\|\le\frac{3}{2}\delta(z)} \frac{d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma}} & \text{für} \quad j(\gamma) = j \text{ (Fall (a))} \\ \delta(z)^{-2M(j-j(\gamma))} \displaystyle\int\limits_{\|t''\|\le\frac{3}{2}\delta(z)} \frac{d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma}} & \text{für} \quad j(\gamma) < j \text{ (Fall (b))} \end{cases}$$

Im Fall $[j(\gamma)] = 0$ liegt nach der Integration über t_1 und t_2 direkt die Abschätzung in der letzten Zeile vor.

Nun wird der Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)] + 1/2$, also Fall (b) mit $[\gamma]$ gerade, betrachtet. Dann ist $[j(\gamma)] + 1 \le j$ und $t = (t_1, t_2, t', t_{2j(\gamma)+2}, t'')$. Es wird Hilfssatz 6.3.2 benutzt, um den Integranden abzuschätzen. Danach werden $\|\zeta - z\| \ge \frac{1}{2}\delta(z)$ ausgenutzt, die neuen Koordinaten t eingeführt, und mit Hilfssatz 6.3.5 wird über $t_{2j(\gamma)+2}$ integriert. Mit der Notation $A_{[j(\gamma)]}(\zeta, z) := -r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M}$ (aus Hilfssatz 6.3.2) gilt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{V_1}(z) \lesssim \int\limits_{V_1} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2})\,dV(\zeta)}{(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \int\limits_{V_1} \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]} |\zeta_l|^{2m_l-2})\, dV(\zeta)}{(A_{[j(\gamma)]}(\zeta,z) + (\operatorname{Re}(\zeta_{[j(\gamma)]+1} - z_{[j(\gamma)]+1}))^2)\, \delta(\zeta)^\gamma\, (A_{[j(\gamma)]}(\zeta,z))^{j+1}\, \|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \int\limits_{\substack{\|t'\|<C \\ \|t''\|<\frac{3}{2}\delta(z)}} \int\limits_0^C \int\limits_0^C \int\limits_0^C \frac{dt_{2j(\gamma)+2}}{(t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2} |v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M} + (t_{2j(\gamma)+2})^2)}$$

$$\frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\, dt_1\, dt_2\, d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\, d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^\gamma\, (t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2} |v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M})^{j+1}\, \delta(z)^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3} \int\limits_{\substack{\|t'\|<C \\ \|t''\|<\frac{3}{2}\delta(z)}} \int\limits_0^C \int\limits_0^C \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\, dt_1\, dt_2\, d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\, d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^\gamma\, (t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2} |v_{l+1}|^2 + \delta(z)^{2M})^{j+1+\frac{1}{2}}}$$

Danach wird genau wie im Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)]$ über die Koordinaten t_1, t_2 und für $[j(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über $t_3, \ldots, t_{2[j(\gamma)]+2}$ integriert. Dann ergibt sich für den Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)] + 1/2$ (d. h. Fall (b) mit $[\gamma]$ gerade) wegen $j + 3/2 - (2 + [j(\gamma)]) = j - ([j(\gamma)] + 1/2) = j - j(\gamma)$ genau das gleiche Integral wie im Fall (b) mit $[\gamma]$ ungerade. Beide Fälle können ab jetzt wieder zusammen behandelt werden.

Nun werden die Integrale in den beiden Fällen $j(\gamma) = j$ und $j(\gamma) \neq j$ berechnet.

Fall (a): $j(\gamma) = j$

Nach Voraussetzung ist $2n - 2j - 3 - [\gamma] \geq 0$, also $2n - 2j - 3 - \gamma > -1$.

$$\begin{aligned}
\widehat{H}^{\gamma,j}_{V_1}(z) &\lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{-2n+2j+3} \int\limits_{\|t''\| \leq \frac{3}{2}\delta(z)} \frac{d\sigma_{2n-2j-2}(t'')}{\|t''\|^\gamma} \\
&\lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{-2n+2j+3} \int\limits_0^{\frac{3}{2}\delta(z)} \rho^{2n-2j-3-\gamma}\, d\rho \\
&\lesssim |2n - 2j - 2 - \gamma|^{-1}\, (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{-2n+2j+3}\, \delta(z)^{2n-2j-2-\gamma} \\
&\leq \widetilde{C}^{(j)}_\gamma\, (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

Fall (b): $j(\gamma) < j$

$$\begin{aligned}
\widehat{H}^{\gamma,j}_{V_1}(z) &\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j-j(\gamma))} \int\limits_{\|t''\| \leq \frac{3}{2}\delta(z)} \frac{d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^\gamma} \\
&\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j-j(\gamma))} \int\limits_0^{\frac{3}{2}\delta(z)} \rho^{[\gamma]-\gamma}\, d\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim\ (1-(\gamma-[\gamma]))^{-1}\,\delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j-j(\gamma))}\,\delta(z)^{1-\gamma+[\gamma]} \\ &\leq\ \widetilde{C}_\gamma\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2j(\gamma))} \end{aligned}$$

Nun wird das Integral über V_2 betrachtet. Auf V_2 gilt

$$\|\zeta - z\| \geq \|\zeta - p\| - \|p - z\| \geq \|t''\| - \delta(z) = \tfrac{1}{3}\,\|t''\| + \left(\tfrac{2}{3}\,\|t''\| - \delta(z)\right) > \tfrac{1}{3}\,\|t''\|.$$

Auch hier wird zunächst wieder der Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)]$, also $j(\gamma) = j$ (Fall (a)) oder $j(\gamma) = (2n-[\gamma]-3)/2$ und $[\gamma]$ ungerade (Fall (b) mit $j(\gamma) = [j(\gamma)]$) betrachtet. Dann gilt $t = (t_1, t_2, t', t'')$. Zuerst wird $\|\zeta - z\| \geq \frac{1}{3}\|t''\|$ ausgenutzt. Anschließend wird über die Koordinaten t_1, t_2 und für $[j(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über $t_3, \ldots, t_{2[j(\gamma)]+2}$ integriert. Für $[j(\gamma)] = 0$ entfällt die zweite Zeile der Rechnung.

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{V_2}(z) \ \lesssim\ \int\limits_{V_2} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{j} |\zeta_l|^{2m_l-2})\,dV(\zeta)}{(-r(\zeta) + |\mathrm{Im}\Phi| + \sum_{l=1}^{j} |\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l - z_l|^2 + \|\zeta - z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \int\limits_{\substack{\|t'\|<C \\ \frac{3}{2}\delta(z)<\|t''\|<C}} \int\limits_0^C \int\limits_0^C \frac{(\prod_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2})\,dt_1\,dt_2\,d\sigma_{2[j(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma+2n-2j-3}\,(t_1 + |t_2| + \sum_{l=1}^{[j(\gamma)]} |v_{l+1} + z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2 + \|t''\|^{2M})^{j+2}}$$

$$\lesssim \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)<\|t''\|<C} \frac{(|\ln(\|t''\|)| + 1)\,d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma+2n-2j-3}} & \text{für} \quad j(\gamma) = j \ \text{(Fall (a))} \\ \displaystyle\int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)<\|t''\|<C} \frac{d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma+2n-2j-3+2M(j-j(\gamma))}} & \text{für} \quad j(\gamma) < j \ \text{(Fall (b))} \end{cases}$$

Im Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)] + 1/2$ (also Fall (b) mit $[\gamma]$ gerade) wird analog zu dem Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)] + 1/2$ bei Integration über V_1 vorgegangen. (Zuerst wird mit dem Hilfssatz 6.3.2 der Integralkern abgeschätzt, und danach werden die Koordinaten $t = (t_1, t_2, t', t_{2j(\gamma)}, t'')$ eingeführt und $\|\zeta - z\| \geq \frac{1}{3}\|t''\|$ ausgenutzt. Dann wird mit Hilfssatz 6.3.5 über $t_{2j(\gamma)+2}$ und anschließend wie im Fall $j(\gamma) = [j(\gamma)]$ über t_1, t_2 und für $[j(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über $t_3, \ldots, t_{2[j(\gamma)]+2}$ integriert.) Es ergeben sich auch wieder die gleichen Abschätzungen wie im Fall (b) mit $j(\gamma) = [j(\gamma)]$. Beide Fälle können also wieder zusammen weiterbehandelt werden.

Fall (a): $j(\gamma) = j$

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{\gamma,j}_{V_2}(z) \ &\lesssim\ \int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)<\|t''\|<C} \frac{(|\ln(\|t''\|)| + 1)\,d\sigma_{2n-2j-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma+2n-2j-3}} \\ &\lesssim\ \int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)}^{C} (|\ln(\rho)| + 1)\,\rho^{-\gamma}\,d\rho \end{aligned}$$

$$\lesssim \begin{cases} (1-\gamma)^{-2} & \text{für} \quad \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))|+1)^2 & \text{für} \quad \gamma = 1 \\ (\gamma-1)^{-1}\left(|\ln(\delta(z))| + (\gamma-1)^{-1}\right)\delta(z)^{1-\gamma} & \text{für} \quad \gamma > 1 \end{cases}$$

Fall (b): $j(\gamma) < j$

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{\gamma,j}_{V_2}(z) &\lesssim \int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)<\|t''\|<C} \frac{d\sigma_{2n-2j(\gamma)-2}(t'')}{\|t''\|^{\gamma+2n-2j-3+2M(j-j(\gamma))}} \\ &\lesssim \int\limits_{\frac{3}{2}\delta(z)}^{C} \rho^{-\gamma-2n+2j+3-2M(j-j(\gamma))}\,\rho^{2n-2j(\gamma)-3}\,d\rho \\ &\lesssim |1-\gamma-(M-1)(2j-2j(\gamma))|^{-1}\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2j(\gamma))} \\ &\lesssim \delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2j(\gamma))} \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt wegen $\gamma \geq 2$.

2. Verfahren:

In Fall (a) kann mit diesem Verfahren kein besseres Ergebnis erzielt werden. Die Fälle (b) und (c) werden zusammen betrachtet.

Fall (b) und (c): $2j+2 > 2n-[\gamma]-1$ und $[\gamma] \leq 2n-2$

Es wird wieder ein Parameter eingeführt:

Fall (b): $\widetilde{\jmath}(\gamma) := (2n-[\gamma]-2)/2 = j(\gamma)+1/2$

Fall (c): $\widetilde{\jmath}(\gamma) := (2n-[\gamma]-2)/2 = 0$

Dann gilt $2n-(2\widetilde{\jmath}(\gamma)+2) = [\gamma]$. Nach Voraussetzung gilt in Fall (b) und (c) $2j+2 > 2n-[\gamma]-1$, also $2j \geq 2n-[\gamma]-2$. Es gilt also $0 \leq \widetilde{\jmath}(\gamma) \leq j$.

Es werden die reellen Koordinaten $t_l := s_l$ für $l = 1,\ldots,2\widetilde{\jmath}(\gamma)+2$ und $t_l := \widetilde{s}_l$ für $l = 2\widetilde{\jmath}(\gamma)+3,\ldots,2n$ gewählt. Weiter bezeichne $t' := (t_3,\ldots,t_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]+2})$ und $t'' := (t_{2\widetilde{\jmath}(\gamma)+3},\ldots,t_{2n})$. Wieder müssen die Fälle $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$ und $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]+1/2$ gesondert betrachtet werden.

Sei $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$, also $\widetilde{\jmath}(\gamma) = 0$ (Fall (c)) oder $\widetilde{\jmath}(\gamma) = (2n-[\gamma]-2)/2$ mit $[\gamma]$ gerade (Fall (b) mit $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$). Zuerst werden die Abschätzung $\|\zeta - z\| > \frac{1}{2}\delta(z)$

benutzt, die Koordinaten t eingeführt, und danach wird mit dem Hilfssatz 6.3.6 über die Koordinate $t_1 = -r(\zeta)$ integriert. Dann gilt für alle $\mu \in [0,1]$:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_2}(z) \lesssim \int\limits_{U_2} \frac{\delta(\zeta)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2})\,dV(\zeta)}{(-r(\zeta)+|\mathrm{Im}\Phi|+\sum_{l=1}^{j}|\zeta_l|^{2m_l-2}|\zeta_l-z_l|^2+\|\zeta-z\|^{2M})^{j+2}\,\|\zeta-z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3}\int\limits_{\substack{\|t'\|<C\\ \|t''\|<C}}\int\limits_0^C\int\limits_0^C \frac{(t_1+\|t''\|)^{-\gamma}\,(\prod_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2})\,dt_1\,dt_2\,d\sigma_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{[\gamma]}(t'')}{(t_1+|t_2|+\sum_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2+\delta(z)^{2M})^{j+2}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3}\int\limits_{\substack{\|t'\|<C\\ \|t''\|<C}}\int\limits_0^C \frac{(\prod_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2})\,dt_2\,d\sigma_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{[\gamma]}(t'')}{\|t''\|^{\gamma-\mu}\,(|t_2|+\sum_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2+\delta(z)^{2M})^{j+1+\mu}}$$

Nun wird über die reelle Koordinate t_2 und für $[\widetilde{\jmath}(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über die Koordinaten $t_3,\dots,t_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]+2}$ integriert.

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_2}(z) \lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3}\int\limits_{\substack{\|t'\|<C\\ \|t''\|<C}} \frac{(\prod_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2})\,d\sigma_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}(t')\,d\sigma_{[\gamma]}(t'')}{\|t''\|^{\gamma-\mu}\,(\sum_{l=1}^{[\widetilde{\jmath}(\gamma)]}|v_{l+1}+z_l|^{2m_l-2}|v_{l+1}|^2+\delta(z)^{2M})^{j+\mu}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3}\begin{cases} (j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma))^{-1}\,\delta(z)^{-2M(j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma))}\int\limits_{\|t''\|<C}\dfrac{d\sigma_{[\gamma]}(t'')}{\|t''\|^{\gamma-\mu}} & \text{für } j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma)>0\\ (|\ln(\delta(z))|+1)\int\limits_{\|t''\|<C}\dfrac{d\sigma_{[\gamma]}(t'')}{\|t''\|^{\gamma-\mu}} & \text{für } j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma)=0\end{cases}$$

$$\lesssim \int\limits_0^C \rho^{[\gamma]-\gamma-1+\mu}\,d\rho\begin{cases}(j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma))^{-1}\,\delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für } j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma)>0\\ (|\ln(\delta(z))|+1)\,\delta(z)^{-2n+2j+3} & \text{für } j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma)=0\end{cases}$$

Im Fall $[\widetilde{\jmath}(\gamma)] = 0$ liegt nach der Integration über t_2 direkt die Abschätzung in der letzten Zeile vor.

Sei nun $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)] + 1/2$ (also Fall (b) mit $[\gamma]$ ungerade). Dann wird genau wie bei dem ersten Verfahren im Fall $j(\gamma) \neq [j(\gamma)]$ vorgegangen: Der Integralkern wird mit Hilfssatz 6.3.2 abgeschätzt, $\|\zeta - z\| \geq \frac{1}{2}\delta(z)$ wird ausgenutzt, und dann werden die neuen Koordinaten $t = (t_1, t_2, t', t_{2\widetilde{\jmath}(\gamma)+2}, t'')$ eingeführt. Dabei wird wie oben $\delta(\zeta) \gtrsim (t_1 + \|t''\|)$ benutzt. Mit Hilfssatz 6.3.5 wird über die Koordinate $t_{2\widetilde{\jmath}(\gamma)+2}$ integriert. Anschließend wird wie im Fall $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$ mit Hilfssatz 6.3.6 über die Koordinate t_1, danach über t_2 und für $[\widetilde{\jmath}(\gamma)] > 0$ mit Hilfssatz 6.3.4 über die Koordinaten $t_3,\dots,t_{2[\widetilde{\jmath}(\gamma)]+2}$ integriert. Wegen $j+1/2+\mu-(1+[\widetilde{\jmath}(\gamma)]) = j+\mu-\widetilde{\jmath}(\gamma)$ ergeben sich auch hier die gleichen Abschätzungen wie im Fall $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$. Die beiden Fälle $\widetilde{\jmath}(\gamma) = [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$ und $\widetilde{\jmath}(\gamma) \neq [\widetilde{\jmath}(\gamma)]$ können also wieder zusammen behandelt werden.

Das Intervall über $[0, C]$ wird aufgeteilt in $[0, \delta(z)^{2M})$ und $[\delta(z)^{2M}, C]$.

Für das Integral über $[0, \delta(z)^{2M})$ wird $\mu > \gamma - [\gamma]$ gewählt.

$$\int_0^{\delta(z)^{2M}} \rho^{[\gamma]-\gamma+\mu-1}\, d\rho \lesssim ([\gamma] - \gamma + \mu)^{-1}\, \delta(z)^{2M([\gamma]-\gamma+\mu)}$$

Damit die von γ abhängige Konstante $([\gamma] - \gamma + \mu)^{-1}$ möglichst klein bleibt, wird nun $\mu = 1$ gewählt.

Für das Integral über $[\delta(z)^{2M}, C]$ und $\gamma \neq [\gamma]$ wird μ mit $0 < \mu < \gamma - [\gamma]$ gewählt.

$$\int_{\delta(z)^{2M}}^{C} \rho^{[\gamma]-\gamma+\mu-1}\, d\rho \lesssim (\gamma - [\gamma] - \mu)^{-1}\, \delta(z)^{2M([\gamma]-\gamma+\mu)}$$

Damit die von γ abhängige Konstante $(\gamma - [\gamma] - \mu)^{-1}$ möglichst gut kontrolliert werden kann, wird nun $\mu = \frac{1}{2}(\gamma - [\gamma])$ gewählt. Dann ist $(\gamma - [\gamma] - \mu) = \frac{1}{2}(\gamma - [\gamma])$.

Für das Integral über $[\delta(z)^{2M}, C]$ und $\gamma = [\gamma]$ wird $\mu = 0$ gewählt.

$$\int_{\delta(z)^{2M}}^{C} \rho^{[\gamma]-\gamma+\mu-1}\, d\rho = \int_{\delta(z)^{2M}}^{C} \rho^{-1} d\rho \lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)$$

Der Fall $j + \mu - \widetilde{\jmath}(\gamma) = 0$ tritt für ($j = \widetilde{\jmath}(\gamma) = (2n - [\gamma] - 2)/2$ und $\mu = 0$) auf, also insbesondere nur für $\gamma = [\gamma]$.

Insgesamt ergeben sich folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_2}(z) \quad &\lesssim \quad \begin{cases} (\widetilde{C}_\gamma)^2\, \delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j-\widetilde{\jmath}(\gamma))}\, \delta(z)^{2M([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j-\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für (} \gamma = [\gamma] \text{ und } j \neq \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{)} \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2\, \delta(z)^{-2n+2j+3} & \text{für (} \gamma = [\gamma] \text{ und } j = \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{)} \end{cases} \\
&\lesssim \quad \begin{cases} (\widetilde{C}_\gamma)^2\, \delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für (} \gamma = [\gamma] \text{ und } j \neq \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{)} \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2\, \delta(z)^{1-\gamma} & \text{für (} \gamma = [\gamma] \text{ und } j = \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{)} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fall (d): $[\gamma] = 2n - 1$

Es werden folgende lokale Koordinaten gewählt: $t_1 := s_1$, $t_l := \widetilde{s}_l$ für $l = 2, \ldots, 2n$. Weiter sei $t'' := (t_2, \ldots, t_{2n})$. Analog zu Fall (b) und (c) gilt für alle $\mu \in [0, 1]$:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}_{U_2}(z) \quad \lesssim \quad \int_{U_2} \frac{dV(\zeta)}{\delta(\zeta)^\gamma\, (-r(\zeta) + \|\zeta - z\|^{2M})^{j+2}\, \|\zeta - z\|^{2n-2j-3}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3} \int\limits_{\|t''\|<C} \int\limits_{0}^{C} \frac{dt_1\, d\sigma_{2n-1}(t'')}{(t_1 + \|t''\|)^{\gamma}\,(t_1 + \delta(z)^{2M})^{j+2}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-2n+2j+3-2M(j+1+\mu)} \int\limits_{\|t''\|<C} \frac{d\sigma_{2n-1}(t'')}{\|t''\|^{\gamma-\mu}}$$

$$\lesssim \delta(z)^{-[\gamma]+2j+2-2M(j+1+\mu)} \int\limits_{0}^{C} \rho^{[\gamma]-\gamma+\mu-1}\, d\rho$$

Das Integral über ρ wurde bereits im Fall (b) und (c) berechnet. Mit den dort für μ verwendeten Werten erfüllt $H_{U_2}^{\gamma,j}(z)$ die folgende Abschätzung:

$$\widehat{H}_{U_2}^{\gamma,j}(z) \lesssim \begin{cases} \widetilde{C}_{\gamma}\,(\delta(z))^{-[\gamma]+2j+2-2M(j+1)+2M([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{-[\gamma]+2j+2-2M(j+1)} & \text{für } \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

$$\lesssim \begin{cases} \widetilde{C}_{\gamma}\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2j+2)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2j+2)} & \text{für } \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

Vergleich der Ergebnisse der beiden Verfahren im Fall (b):

Mit dem ersten Verfahren wurde das folgende Ergebnis erzielt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{1-\gamma} + \widetilde{C}_{\gamma}\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2j(\gamma))}$$

Die Abschätzung mit dem zweiten Verfahren lieferte

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \lesssim (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{1-\gamma} + \widehat{H}_{U_2}^{\gamma,j}(z),$$

wobei $\widehat{H}_{U_2}^{\gamma,j}(z)$ wie folgt abgeschätzt wurde:

$$\widehat{H}_{U_2}^{\gamma,j}(z) \lesssim \begin{cases} (\widetilde{C}_{\gamma})^2\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für } (\ \gamma = [\gamma] \text{ und } j \neq \widetilde{\jmath}(\gamma)\ ) \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2\,\delta(z)^{1-\gamma} & \text{für } (\ \gamma = [\gamma] \text{ und } j = \widetilde{\jmath}(\gamma)\ ) \end{cases}$$

Es gilt $2\widetilde{\jmath}(\gamma) = 2j(\gamma) + 1$. Im Fall $\gamma \neq [\gamma]$ wird berechnet, unter welcher Bedingung die zweite Abschätzung besser ist:

$$0 < (M-1) + (2M-1)([\gamma]-\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad (2M-1)(\gamma-[\gamma]) < (M-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \gamma - [\gamma] < \frac{(M-1)}{(2M-1)}$$

Insgesamt ergibt sich im Fall (b) also folgende Abschätzung:

Für $\gamma \neq [\gamma]$ gilt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \lesssim \begin{cases} (|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}_\gamma)\,\delta(z)^{1-\gamma} & \text{für } M = 1 \\ \widetilde{C}_\gamma\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für } \left(\gamma - [\gamma] \geq \frac{(M-1)}{(2M-1)} \text{ und } M \neq 1\right) \\ (\widetilde{C}_\gamma)^2\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \text{für } \gamma - [\gamma] \leq \frac{(M-1)}{(2M-1)} \end{cases}$$

Für $\gamma = [\gamma]$ gilt:

$$\widehat{H}^{\gamma,j}(z) \lesssim \begin{cases} (|\ln(\delta(z))| + 1)\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)(2j-2\widetilde{\jmath}(\gamma))} & \text{für } \begin{cases} (\, j \neq \widetilde{\jmath}(\gamma)\,) \text{ oder} \\ (\, j = \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{ und } M = 1\,) \end{cases} \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2\,\delta(z)^{1-\gamma} & \text{für } (\, j = \widetilde{\jmath}(\gamma) \text{ und } M \neq 1\,) \end{cases}$$

Aus den Einzelergebnissen ergeben sich nun die Abschätzungen für $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$. □

Satz 6.4.5 (Abschätzungen des Lösungsoperators für $F \in \mathcal{B}^{\gamma}_{(0,q)}(D^{(m)})$)
Für das Gebiet $D^{(m)} \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ und für $1 \leq q \leq n$ existieren lineare Operatoren $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ und gilt $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$ auf $D^{(m)}$.

(ii) Für $q \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine Konstante $C > 0$ und nur von $\gamma \in [\,0, 2n)$ und q abhängige Konstanten $\widetilde{C}_\gamma, C_{\gamma,q} > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $\gamma \in [\,0, 2n)$ die Lösung $\widehat{T}_q F$ auf $D^{(m)}$ die folgenden Abschätzungen erfüllt, wobei $C_F := C\,\|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})}$ ist:

(a) Für ($q \leq n-1$ und $\gamma < 2q$) gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C_F \begin{cases} (C_{\gamma,q})^2 & \textit{für } \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2 & \textit{für } \gamma = 1 \\ C_{\gamma,q}\,(|\ln(\delta(z))| + C_{\gamma,q})\,\delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für } \gamma > 1 \end{cases}$$

(b) Für ($q \leq n-1$, $2q \leq \gamma < 2n-1$ und $\gamma \neq [\gamma]$) gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C_F \begin{cases} (|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}_\gamma)\,\delta(z)^{1-\gamma} \ \textit{für } (M = 1 \textit{ und } \gamma < 2n-2\,) \\ \widetilde{C}_\gamma\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)([\gamma]-2q+1)} \ \textit{für } \begin{cases} (\,\gamma - [\gamma] \geq \frac{(M-1)}{(2M-1)},\ M \neq 1 \\ \textit{und } \gamma < 2n-2\,) \end{cases} \\ (\widetilde{C}_\gamma)^2\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} \ \textit{für } \begin{cases} (\,\gamma - [\gamma] \leq \frac{(M-1)}{(2M-1)}\,) \\ \textit{oder } (\,[\gamma] = 2n-2\,) \end{cases} \end{cases}$$

Für ($q \le n-1$, $2q \le \gamma < 2n-1$ und $\gamma = [\gamma]$) gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \le C_F \begin{cases} (|\ln(\delta(z))|+1)\,\delta(z)^{1-\gamma-(M-1)([\gamma]-2q)} \ \textit{für} \begin{cases} (\ \gamma \ne 2q\ ) \ \ \textit{oder} \\ (\ \gamma < 2n-2 \ \textit{und}\ M=1\ ) \end{cases} \\ (|\ln(\delta(z))|+1)^2\,\delta(z)^{1-\gamma} \ \textit{für} \begin{cases} (\ \gamma < 2n-2,\ \gamma = 2q \ \textit{und}\ M \ne 1\ ) \\ \textit{oder}\ \ (\ \gamma = 2n-2 = 2q\ ) \end{cases} \end{cases}$$

(c) Für ($q \le n-1$ und $2n-1 \le \gamma < 2n$) gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \le C_F \begin{cases} \widetilde{C}_\gamma\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2n-2q)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \textit{für}\ \gamma \ne [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))|+1)\,\delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2n-2q)} & \textit{für}\ \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

(d) Für ($q = n$ und $0 \le \gamma < 2n$) gilt:

$$|\widehat{T}_n F(z)| \le C_F \begin{cases} C_{\gamma,n} & \textit{für}\ \ \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))|+1) & \textit{für}\ \ \gamma = 1 \\ C_{\gamma,n}\,\delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für}\ \ 1 < \gamma < 2n \end{cases}$$

Dabei sind die von $\gamma \in [0,2n)$ abhängigen positiven Konstanten folgendermaßen definiert:

$$\widetilde{C}_\gamma \ := \begin{cases} \max\{(\gamma-[\gamma])^{-1},\,(1-(\gamma-[\gamma]))^{-1}\} & \textit{für}\ \ \gamma \ne [\gamma] \\ 1 & \textit{für}\ \ \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

$$C_{\gamma,q} \ := \begin{cases} \max\{|2q-\gamma|^{-1},\,|1-\gamma|^{-1}\} & \textit{für}\ \ \gamma \ne 2q \ \textit{und}\ \gamma \ne 1 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis:
Für den Lösungsoperator $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ aus Satz 5.1.6 und für $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ (mit $\gamma \in [0,2n)$) gilt auf $D^{(m)}$:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \le C\|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \left(\sum_{j=0}^{n-q-1} \widehat{H}^{\gamma,j}(z) + \widehat{H}^\gamma(z) \right)$$

Die Sätze 6.4.3 und 6.4.4 liefern Abschätzungen der Integrale $\widehat{H}^\gamma(z)$ und $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$, wobei zu berücksichtigen ist, daß im Fall $q = n$ nur das Integral $\widehat{H}^\gamma(z)$ auftritt. Die Ergebnisse für $q = n$ können also direkt aus Satz 6.4.3 abgelesen werden.

Sei nun $q \le n-1$ und $\gamma \in [0,2n)$ beliebig fest gewählt. Dann werden die Abschätzungen für die $\widehat{H}^{\gamma,j}(z)$ in Satz 6.4.4 mit wachsendem j offenbar schlechter. Es genügt daher, das maximale auftretende j, also $j_{\max} = n-q-1$, zu betrachten. Dann gilt:

$$[\gamma] \le 2n - 2j_{\max} - 3 = 2q-1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma < 2q$$

$$j_{\max} = \widetilde{\jmath}(\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad 2n - 2q - 2 = 2n - [\gamma] - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad [\gamma] = 2q$$

Damit folgt die Behauptung aus den Ergebnissen in Satz 6.4.3 und Satz 6.4.4. $\square$

6.5 Diskussion der Ergebnisse auf dem komplexen Pseudoellipsoid

Zunächst werden als Folgerungen aus Satz 6.4.5 eine etwas gröbere Abschätzung, die einen besseren Überblick über die Ergebnisse ermöglicht, und Abschätzungen für die Einheitskugel $B^{(n)} = D^{(1,\dots,1)}$ angegeben.

Folgerung 6.5.1 (aus Satz 6.4.5)
Für das Gebiet $D^{(m)} \subset\subset \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ und für $1 \leq q \leq n$ existieren lineare Operatoren $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für $F \in \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ gilt $\overline{\partial}\widehat{T}_q F = F$ auf $D^{(m)}$.

(ii) Für $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es eine Konstante $C > 0$ und nur von $\gamma \in [0, 2n)$ und q abhängige Konstanten $\widetilde{C}_\gamma, C_{\gamma,q} > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $\gamma \in [0, 2n)$ die Lösung $\widehat{T}_q F$ auf $D^{(m)}$ die folgenden Abschätzungen erfüllt:

(a) Für $\gamma < 2q$ gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C \, \|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \begin{cases} (C_{\gamma,q})^2 & \textit{für} \quad \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2 & \textit{für} \quad \gamma = 1 \\ C_{\gamma,q} \, (|\ln(\delta(z))| + C_{\gamma,q}) \, \delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für} \quad \gamma > 1 \end{cases}$$

(b) Für $2q \leq \gamma < 2n - 1$ gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C \, \|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \, (|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}_\gamma)^2$$

$$\begin{cases} \delta(z)^{1-\gamma-(M-1)([\gamma]-2q+1)} & \textit{für} \ \left(\gamma - [\gamma] \geq \frac{(M-1)}{(2M-1)} \ \textit{und} \ \gamma < 2n-2 \right) \\ \delta(z)^{1-\gamma-(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)} & \textit{sonst} \end{cases}$$

(c) Für ($q < n-1$ und $2n-1 \leq \gamma < 2n$) gilt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C \, \|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \, (|\ln(\delta(z))| + \widetilde{C}_\gamma) \, \delta(z)^{-\gamma-(M-1)(2n-2q)+(2M-1)([\gamma]-\gamma)}$$

(Dabei sind die Konstanten $\widetilde{C}_\gamma$ und $C_{\gamma,q}$ wie in Satz 6.4.5 definiert.) □

Bemerkung 6.5.2 (Interpretation der Ergebnisse)

(a) Die Abschätzungen der Lösungen werden offenbar für größeres $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ besser. Für $q < n-1$ liegen nämlich im Fall $\gamma < 2q$ die günstigsten Abschätzungen vor.

(b) Die von γ abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_\gamma$ und $C_{\gamma,q}$ in Satz 6.4.5 (und Folgerung 6.5.1) geben an, wie die Konstanten in der Abschätzung der Lösung $\widehat{T}_q F$ für $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)})$ von γ abhängen. Offensichtlich wachsen die Konstanten i. a. bei Annäherung von γ an eine ganze Zahl h wie $|\gamma - h|^{-1}$ oder $|\gamma - h|^{-2}$. In den Fällen (a) und (d) des vorigen Satzes wächst die von γ abhängige Konstante $C_{\gamma,q}$ allerdings nur bei Annäherung an 1 oder an $2q$.

(c) Aus Satz 6.4.5 kann auch direkt abgelesen werden, in welchem Formenraum $\mathcal{B}^{\widetilde{\gamma}(\gamma)}_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ die Lösung $\widehat{T}_q F$ für beliebiges $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ liegt.

Für den Fall der Einheitskugel werden für $q \leq n-1$ minimal schlechtere Abschätzungen als in Satz 6.4.5 angegeben, d. h. die Abschätzungen werden höchstens durch einen zusätzlichen Logarithmusterm verschlechtert. Außerdem werden die verschiedenen von γ (und q) abhängigen Konstanten nicht mehr unterschieden und zu einer Konstante C_γ zusammengefaßt.

Folgerung 6.5.3 (Einheitskugel)
Sei $1 \leq q \leq n-1$. Für die Einheitskugel $B^{(n)} \subset\subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, existiert ein Lösungsoperator $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(B^{(n)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(B^{(n)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(B^{(n)})$ der Gleichung $\overline{\partial} U = F$, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(B^{(n)}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $\gamma \in [0, 2n)$ die Lösung $\widehat{T}_q F$ auf $B^{(n)}$ folgende Abschätzungen erfüllt:

$$|\widehat{T}_q F(z)| \leq C_\gamma \, \|F\|_{\mathcal{B}^\gamma(B^{(n)})} \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad \gamma < 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2 & \textit{für} \quad \gamma = 1 \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für} \quad \gamma < 2n-2 \\ \delta(z)^{1-\gamma}\, \delta(z)^{[\gamma]-\gamma} & \textit{für} \quad [\gamma] = 2n-2 \textit{ und } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)^2\, \delta(z)^{1-\gamma} & \textit{für} \quad \gamma = 2n-2 \\ \delta(z)^{-\gamma}\, \delta(z)^{[\gamma]-\gamma} & \textit{für} \quad [\gamma] = 2n-1 \textit{ und } \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta(z))| + 1)\, \delta(z)^{-\gamma} & \textit{für} \quad \gamma = 2n-1 \end{cases}$$

Dabei hängt die Konstante C_γ nur von γ und q ab. □

Es wurde zu Beginn dieses Kapitels darauf hingewiesen, daß bei den Abschätzungen des Lösungsoperators für Formen $F \in \mathcal{B}^\gamma_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial})$ die Menge $\mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ durch eine beliebige andere endliche Teilmenge N von $bD^{(m)}$ ersetzt werden kann.

Definition 6.5.4
Seien $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit $\mathcal{C}^2$-Rand, $N \subset bD$ eine endliche Teilmenge des

Randes von D und δ_N^D der euklidische Abstand von der Menge N:

$$\delta_N^D(z) := \operatorname{dist}(z, N) = \min_{p \in N} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n |z_j - p_j|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

Auf $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D)$ werden für $0 \le \gamma < 2n$ die folgenden Normen definiert:

$$\|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)} := \sup_{z \in D} |F(z)| \, (\delta_N^D(z))^\gamma \quad \textit{für } F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D)$$

Der Raum der glatten $(0,q)$-Formen auf D mit endlicher $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)}$-Norm heißt

$$\mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D) := \left\{ F \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D) : \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)} < \infty \right\}.$$

Bemerkung 6.5.5 (beliebige endliche Teilmenge im Rand)
Für eine beliebige endliche Teilmenge N im Rand des komplexen Pseudoellipsoids $D^{(m)}$ und $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D^{(m)})$ (mit $0 \le q \le n$ und $\gamma \in [\,0, 2n))$ gilt eine Entsprechung von Satz 6.4.5. Dabei sind in Satz 6.4.5 nur $\mathcal{B}^{\gamma}_{(0,q)}(D^{(m)})$ durch $\mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D^{(m)})$ und $\delta(z)$ durch $\delta_N^{D^{(m)}}(z)$ zu ersetzen.

Über die Qualität der Abschätzungen (d. h. darüber, ob die mit $\widehat{T}_q$ konstruierten Lösungen optimal sind oder nicht) liegen keine Informationen vor. Für den Fall streng pseudokonvexer Gebiete wurden allerdings von Fischer in [Fi] u. a. Abschätzungen der hier betrachteten Art bewiesen. Für den Sonderfall der streng pseudokonvexen Einheitskugel $B^{(n)}$ sollen diese mit den Ergebnissen aus Folgerung 6.5.3 verglichen werden. Da die Abschätzungen in dieser Arbeit mit der Grundidee für die Aufteilung des Integrationsgebiets aus [Fi] durchgeführt werden, sollten sich im Sonderfall $B^{(n)}$ auch genauso gute Ergebnisse wie in [Fi] ergeben.

Fischer betrachtet in [Fi] beschränkte, streng pseudokonvexe Gebiete D im $\mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{C}^2$-Rand und mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit N der Kodimension d im Rand bD. Dabei soll D eine streng plurisubharmonische globale $\mathcal{C}^2$-Randfunktion $\widetilde{\varrho}$ (auf einer Umgebung von bD) besitzen. Die Untermannigfaltigkeit N sei lokal (d. h. in einer hinreichend kleinen Umgebung U eines Punktes $p \in N$) durch die Beziehung

$$\begin{aligned} N \cap U &= \left\{ z \in U \cap bD : \varrho^1(z) = \ldots = \varrho^d(z) = 0 \right\} \\ &= \left\{ z \in U : \widetilde{\varrho}(z) = \varrho^1(z) = \ldots = \varrho^d(z) = 0 \right\} \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\varrho^1, \ldots, \varrho^d$ $\mathcal{C}^2$-Funktionen sind, für die in allen Punkten aus U gilt, daß die Formen $d\widetilde{\varrho}, d\varrho^1, \ldots, d\varrho^d$ $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Weiter sei $\delta_N^D(z) := \operatorname{dist}(z, N)$ der euklidische Abstand von der abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit N. Es wird die Lösbarkeit der Gleichung $\overline{\partial} U = F$ für Formen $F \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ untersucht, die auf D die Bedingung

$$\sup_{z \in D} |F(z)| \, (\delta^D_N(z))^\gamma =: C_{F,\gamma} < \infty \quad \text{für ein } 0 \leq \gamma < d+1$$

erfüllen. In [Fi] wird ein Integral-Lösungsoperator R_D der Gleichung $\overline{\partial} U = F$ für stetige integrable geschlossene Formen F konstruiert, und es werden für Formen F mit dem eben beschriebenen Wachstumsverhalten u. a. Abschätzungen der Lösung $R_D F$ gegen die Distanzfunktion $\delta^D_N(z)$ bewiesen.

Für den Fall einer $(2n-1)$-kodimensionalen abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit N (also einer endlichen Punktmenge) im Rand eines beschränkten, streng pseudokonvexen Gebietes D im $\mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{C}^2$-Rand erhält Fischer in der Notation aus Definition 6.5.4 folgende Ergebnisse:

Sei $1 \leq q \leq n$ und $\gamma \in [0, 2n)$. Dann gibt es einen linearen Integral-Lösungsoperator $R_D : \mathcal{C}^0_{(0,q)}(D) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^0_{(0,q-1)}(D)$, so daß für alle Formen $F \in \mathcal{C}^0_{(0,q)}(D) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ auf D die Formel $\overline{\partial} R_D F = F$ gilt und daß $R_D F$ für $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ die folgenden Abschätzungen erfüllt:[20]

(i) Für $q = n$ tritt im Operator R_D nur das Integral mit dem BMK-Kern auf. Für $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,n)}(D)$ gelten also genau die gleichen Abschätzungen wie im Fall eines komplexen Pseudoellipsoids.

(ii) Sei $1 \leq q \leq n-1$ und $0 \leq \gamma < 1/2$. Dann gibt es eine nur von γ abhängige Konstante $C_\gamma > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ und alle $z \in D$ gilt:[21]

$$|R_D F(z)| \leq C_\gamma \, \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)}$$

(iii) Für $1 \leq q \leq n-1$ und $1/2 \leq \gamma < 1$ ergaben sich nur Abschätzungen bzgl. der Randdistanz: Es gibt eine nur von γ abhängige Konstante $C_\gamma > 0$, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ und alle $z \in D$ gilt:

$$|R_D F(z)| \leq C_\gamma \, \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)} \begin{cases} (|\ln(\mathrm{dist}(z, bD))| + 1) & \text{mit} \quad \gamma = 1/2 \\ \mathrm{dist}(z, bD)^{\frac{1}{2}-\gamma} & \text{mit} \quad 1/2 < \gamma < 1 \end{cases}$$

(iv) Für $1 \leq q \leq n-1$ und $1 \leq \gamma < 2n$ gibt es eine nur von γ abhängige Konstante C_γ, so daß für alle $F \in \mathcal{B}^{\gamma,N}_{(0,q)}(D) \cap ker(\overline{\partial})$ und alle $z \in D$ gilt:

$$|R_D F(z)| \leq C_\gamma \, \|F\|_{\mathcal{B}^{\gamma,N}(D)} \begin{cases} \delta^D_N(z)^{-\gamma} \, \delta^D_N(z)^{[\gamma]-\gamma} & \text{für} \quad \gamma \neq [\gamma] \\ (|\ln(\delta^D_N(z))| + 1) \, \delta^D_N(z)^{-\gamma} & \text{für} \quad \gamma = [\gamma] \end{cases}$$

[20] Die Abschätzungen werden in [Fi] nicht nur für glatte geschlossene, sondern für stetige geschlossene Formen auf D, die der Abschätzung $\sup_{z \in D} |F(z)| \, (\delta^D_N(z))^\gamma = C_F < \infty$ mit $0 \leq \gamma < 2n$ genügen, bewiesen.

[21] Für $0 \leq \gamma < 1/2$ gelten sogar Hölder-Abschätzungen, die hier aber nicht angegeben werden.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus Folgerung 6.5.3 (mit den entsprechenden Modifikationen gemäß Bemerkung 6.5.5) zeigt, daß die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse für den Sonderfall der Einheitskugel $B^{(n)}$ mindestens so gut sind wie die Ergebnisse von Fischer in [Fi]. Für $1/2 \leq \gamma < 2n-1$ sind sie sogar wesentlich besser.

7 Abschätzungen auf den Pseudo-Siegelgebieten

Der Operator $T_q := b^*\widehat{T}_q B^*$ mit dem Integral-Lösungsoperator $\widehat{T}_q$ aus Satz 5.1.6, $\widehat{T}_q : \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(D^{(m)}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$, löst die Gleichung $\overline{\partial}u = f$ für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$, falls der negative Parameter k so klein ist, daß $\gamma(k,m,q) < 2n$ gilt. Aus den Teilergebnissen des zweiten und sechsten Kapitel werden nun die Abschätzungen für den Lösungsoperator $T_q := b^*\widehat{T}_q B^*$ berechnet. Für die Darstellung der Ergebnisse werden einige Abkürzungen benötigt. Die bereits im zweiten Kapitel eingeführten Notationen (aus Satz 2.4.3, 2.4.4 und 2.4.7) werden nochmals angegeben.

$$M := \max\{m_1, \dots, m_n\} = \max\{m_{n-1}, m_n\}$$

(i) Exponent aus der Abschätzung von $F := B^* f$ gegen $\delta(z)$

$$\gamma = \gamma(k,m,q) := \begin{cases} 2m_{n-1}\alpha(k,m,q) & \text{für} \quad k \geq -1 - m_n\nu(m,q) \\ 0 & \text{für} \quad k < -1 - m_n\nu(m,q) \end{cases}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \alpha(k,m,q) := \nu(m,q) + \frac{1-|k|}{\kappa(k,m,q)} \quad \text{und} \quad \nu = \nu(m,q) := 1 + \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_l}$$

$$\text{und} \quad \kappa = \kappa(k,m,q) := \begin{cases} m_n & \text{für} \quad (\ m_n \leq 2m_q\ ) \\ 2m_q & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \leq 1\ ) \\ m_n & \text{für} \quad (\ m_n \geq 2m_q \text{ und } |k| \geq 1\ ) \end{cases}$$

(ii) Exponenten aus der Abschätzung von $u := b^*U$ gegen $|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1}$

$$\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_1(m,q) := \sum_{l=1}^{q-1} \frac{1}{m_{n-l}} \quad \text{für } q \geq 2$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu) := \frac{1}{m_n} + \frac{(1+\mu)}{2m_{n-q+1}} + \sum_{l=1}^{q-2} \frac{1}{m_{n-l}} \quad \text{für } q \geq 2$$

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m,q) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad (q = 1\ ) \\ \widetilde{\alpha}_2(m,q,0) & \text{für} \quad (\ q \geq 2 \text{ und } m_n \geq 2m_{n-q+1}\ ) \\ \widetilde{\alpha}_1(m,q) & \text{für} \quad (\ q \geq 2 \text{ und } m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

(iii) Funktion zum Umrechnen der Bedingungen an γ in Bedingungen für k

Für das Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ (mit $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$) und $q \in \{1, \dots, n\}$ sei $g : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) := g(x,m,q)$ die folgende Funktion:

$$g(x) = g(x,m,q) := \min\left\{0,\ -1 - \widehat{\kappa}(x,m,q)\left(\nu(m,q) - \frac{x}{2m_{n-1}}\right)\right\} \quad \text{mit}$$

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(x,m,q) := \begin{cases} m_n & \text{für} \quad (\ m_n \le 2m_q\ ) \\ 2m_q & \text{für} \quad (\ m_n \ge 2m_q \text{ und } x \ge 2m_{n-1}\nu(m,q)\ ) \\ m_n & \text{für} \quad (\ m_n \ge 2m_q \text{ und } x \le 2m_{n-1}\nu(m,q)\ ) \end{cases}$$

Satz 7.1.1 (Abschätzungen des Lösungsoperators auf $S^{(m)}$)
Sei $S^{(m)} := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \varrho^{(m)}(\zeta) := \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} + \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n}) - 1 < 0\}$ mit $n \ge 2$. Dann existieren für $q \in \{1,2,\ldots,n\}$ und $k < k_0(m,q) := g(2n,m,q)$ lineare Operatoren $T_q : \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ gilt $\overline{\partial} T_q f = f$ auf $S^{(m)}$.

(ii) Es gibt eine nur von k abhängige Konstante $C_k > 0$, so daß für alle Formen $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|T_q f\|_{\mathcal{F}^{l(k,m,q)}(S^{(m)})} \le C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Dabei ist $l := l(k,m,q)$ folgendermaßen zu wählen: (Es ist zu beachten, daß die Funktion $g(x) := g(x,m,q)$ von $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ und q abhängt und daß in den folgenden Abschätzungen immer $\gamma := \gamma(k,m,q)$, $\widetilde{\alpha} := \widetilde{\alpha}(m,q)$, $\widetilde{\alpha}_1 := \widetilde{\alpha}_1(m,q)$ und $\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)$ ist.)

(a) Für ($q \le n-1$ und $k < g(2q)$) gelten folgende Abschätzungen für l:

$$l \ \ge\ -\widetilde{\alpha}\,\min\{m_n, 2m_1\} \quad \textit{für} \quad k < g(1)$$

$$l \ >\ \begin{cases} (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})\,\min\{m_n,2m_1\} & \textit{für}\ (\ g(1) \le k \le g(1+\widetilde{\alpha})\ ) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})m_n \quad \textit{für} & \begin{cases} (\ g(1+\widetilde{\alpha}) < k < g(2q) \textit{ und } q = 1\ ) \textit{ oder} \\ (\ g(1+\widetilde{\alpha}) < k < g(2q) \textit{ und } m_n \le 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \mu_0 + (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu_0))m_n \quad \textit{für} & \begin{cases} (\ g(1+\widetilde{\alpha}) < k < g(2q),\ q \ge 2 \\ \textit{und } m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \end{cases}$$

mit $\mu_0 = \mu_0(k,m,q) := \min\{1, 2m_{n-q+1}(-1+\gamma(k,m,q)-\widetilde{\alpha}(m,q))\}$

(b) Für ($q \le n-1$ und $g(2q) \le k < g(2n-1)$) gelten folgende Abschätzungen für l:

Für ($g(2q) \le k < g(2n-2)$, $\gamma(k,m,q) \ne [\gamma(k,m,q)]$ und $M = 1$) gilt:

$$l > \begin{cases} (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})m_n & \textit{für} \quad (\ q = 1\ ) \ \textit{oder} \ (\ q \ge 2 \textit{ und } m_n \le 2m_{n-q+1}\ ) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}_1)m_n & \textit{für} \quad (\ q \ge 2 \textit{ und } m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

Für $\Big(g(2q) \le k < g(2n-2)$, $\gamma(k,m,q) \ne [\gamma(k,m,q)]$, $M \ne 1$ und $\gamma - [\gamma] \ge \frac{(M-1)}{(2M-1)}\Big)$ gilt:

$$l \ge \begin{cases} \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q+1)-\widetilde{\alpha}\Big)m_n \quad \textit{für} & \begin{cases} (\ q = 1\ ) \ \textit{oder} \\ (\ q \ge 2 \textit{ und } m_n \le 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q+1)-\widetilde{\alpha}_1\Big)m_n \quad \textit{für} \ (\ q \ge 2 \textit{ und } m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

Für $\Big(\gamma(k,m,q) \neq [\gamma(k,m,q)]$ *und* $\Big(\gamma-[\gamma] \leq \frac{(M-1)}{(2M-1)}$ *oder* $g(2n-2) \leq k < g(2n-1)\Big)\Big)$ *gilt:*

$$l \geq \begin{cases} \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}\Big)m_n \text{ für} \begin{cases} (\ q=1\ ) \ \textit{oder} \\ (\ q \geq 2 \ \textit{und} \\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}_1\Big)m_n \text{ für} \begin{cases} (\ q \geq 2 \ \textit{und} \\ m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \end{cases}$$

Für $\gamma(k,m,q) = [\gamma(k,m,q)]$ *gilt:*

$$l > \begin{cases} \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)-\widetilde{\alpha}\Big)m_n & \text{für} \begin{cases} (\ q=1\ ) \ \textit{oder} \\ (\ q \geq 2 \ \textit{und}\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)-\widetilde{\alpha}_1\Big)m_n & \text{für}\ (\ q \geq 2 \ \textit{und}\ m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

(c) Für ($q \leq n-1$ *und* $g(2n-1) \leq k < g(2n)$) *gelten folgende Abschätzungen für* l*:*

Für $\gamma(k,m,q) \neq [\gamma(k,m,q)]$ *gilt:*

$$l \geq \begin{cases} \Big(\gamma+(M-1)(2n-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}\Big)m_n & \text{für} \begin{cases} (\ q=1\ ) \ \textit{oder} \\ (\ q \geq 2 \ \textit{und} \\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \Big(\gamma+(M-1)(2n-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}_1\Big)m_n & \text{für} \begin{cases} (\ q \geq 2 \ \textit{und} \\ m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \end{cases}$$

Für $\gamma(k,m,q) = [\gamma(k,m,q)]$ *gilt:*

$$l > \begin{cases} \Big(\gamma+(M-1)(2n-2q)-\widetilde{\alpha}\Big)m_n & \text{für} \begin{cases} (\ q=1\ ) \ \textit{oder} \\ (\ q \geq 2 \ \textit{und}\ m_n \leq 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases} \\ \Big(\gamma+(M-1)(2n-2q)-\widetilde{\alpha}_1\Big)m_n & \text{für}\ (\ q \geq 2 \ \textit{und}\ m_n > 2m_{n-q+1}\ ) \end{cases}$$

(d) Für ($q = n$ *und* $k < g(2n) = k_0(m,n)$) *gelten folgende Abschätzungen für* l*:*

$$l \ > \ -\widetilde{\alpha}\ \min\{m_n, 2m_1\} \quad \text{für} \quad k = g(1)$$

$$l \geq \begin{cases} -\widetilde{\alpha}\ \min\{m_n, 2m_1\} & \text{für}\ (\ k < g(1)\ ) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})\ \min\{m_n, 2m_1\} & \text{für}\ (\ g(1) < k \leq g(1+\widetilde{\alpha})\ ) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha})m_n & \text{für}\ (\ g(1+\widetilde{\alpha}) < k < g(2n)\ \textit{und}\ m_n \leq 2m_1\ ) \\ \mu_0 + (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}_2(m,n,\mu_0))m_n & \text{für}\ (\ g(1+\widetilde{\alpha}) < k < g(2n)\ \textit{und}\ m_n > 2m_1\ ) \end{cases}$$

mit $\mu_0 = \mu_0(k,m,n) := \min\{1, 2m_1(-1+\gamma(k,m,n)-\widetilde{\alpha}(m,n))\}$

Beweis:

Zunächst wird berechnet, wie sich die Bedingungen an $\gamma(k,m,q)$ mit der am Anfang dieses Kapitels definierten Funktion $g(x) = g(x,m,q)$ in Bedingungen an den

Parameter k übertragen lassen. Seien also nun $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ und $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fest gewählt. Für k mit $g(0) = -1 - m_n\nu(m, q) \le k < 0$ ist dann

$$\gamma = \gamma(k, m, q) = 2m_{n-1}\left(\nu(m, q) + \frac{1+k}{\kappa(k, m, q)}\right)$$

aufgefaßt als Funktion von k eine stetige, streng monoton wachsende Funktion. Die Funktion $\gamma(\cdot, m, q)$ bildet das Intervall $(\ -1 - m_n\nu(m, q) \le k \le -1\ )$ bijektiv auf $(\ 0 \le \gamma \le 2m_{n-1}\nu(m, q)\ )$ und das Intervall $(\ -1 \le k < 0\ )$ bijektiv auf $(\ 2m_{n-1}\nu(m, q) \le \gamma < 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\})\ )$ ab. Jetzt wird die Umkehrfunktion berechnet:

$$x = \gamma(k, m, q) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{2m_{n-1}} - \nu(m, q) = \frac{1+k}{\kappa(k, m, q)}$$

Die Umkehrfunktion ist für $(\ 0 \le x < 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\})\ )$ wohldefiniert als:

$$k = k(x, m, q) \;=\; -1 - \widehat{\kappa}(x, m, q)\left(\nu(m, q) - \frac{x}{2m_{n-1}}\right) \quad \text{mit}$$

$$\widehat{\kappa}(x, m, q) \;:=\; \begin{cases} m_n & \text{für} \quad (\ m_n \le 2m_q\ ) \\ 2m_q & \text{für} \quad (\ m_n \ge 2m_q \text{ und } x \ge 2m_{n-1}\nu(m, q)\ ) \\ m_n & \text{für} \quad (\ m_n \ge 2m_q \text{ und } x \le 2m_{n-1}\nu(m, q)\ ) \end{cases}$$

Die am Anfang definierte Funktion $g(x, m, q)$ erfüllt offenbar die folgende Bedingung:

$$g(x, m, q) = \begin{cases} k(x, m, q) & \text{für} \quad 0 \le x < 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\}) \\ 0 & \text{für} \quad x \ge 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\}) \end{cases}$$

Für $k < 0$ ist $a \le \gamma(k, m, q) < b$ mit $a \ge 0$ dann äquivalent zu $g(a) \le k < g(b)$.[22] Die Bedingungen an $\gamma(k, m, q)$ in Satz 6.4.5 können also mittels der Funktion $g(x) = g(x, m, q)$ direkt in Bedingungen an k umgewandelt werden.

Nun folgt der Beweis des Satzes:

Nach Satz 2.4.4 gibt es eine von k abhängige Konstante $\widetilde{C}_k > 0$, so daß für jedes $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}})$ die Form $F := B^* f$ für alle $z \in \overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ die Abschätzung

$$|F(z)| \le \widetilde{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, \delta(z)^{-\gamma(k,m,q)}$$

erfüllt. Für $\gamma(k, m, q) < 2n$, also $k < k_0(m, q) := g(2n) = g(2n, m, q)$, ist F nach Satz 2.4.6 in $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(\overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})) \cap \mathcal{L}^1_{(0,q)}(D^{(m)})$. Für $1 \le q \le n$ ist der Operator

[22] Das Minimum bei der Definition von $g(x, m, q)$ wird benötigt, weil $k < 0$ vorausgesetzt wurde. Ist nämlich $x \ge 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\})$, so ist $k(x, m, q) \ge 0$. Da nur $k < 0$ zugelassen ist, wird $g(x, m, q)$ für $x \ge 2m_{n-1}(\nu(m, q) + 1/\min\{m_n, 2m_q\})$ durch das Minimum auf den Wert Null gesetzt.

$T_q := b^*\widehat{T}_q B^*$ somit für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ wohldefiniert, und es gilt auf $S^{(m)}$ die Gleichung

$$\overline{\partial} T_q f = \overline{\partial} b^* \widehat{T}_q B^* f = b^* \overline{\partial}(\widehat{T}_q B^* f) = b^* B^* f = f.$$

Also löst T_q die Gleichung $\overline{\partial} u = f$. Die Abschätzungen des Lösungsoperators $T_q := b^*\widehat{T}_q B^*$ und damit auch die Koeffizienten $l := l(k,m,q)$ werden aus den Abschätzungen der zurückgezogenen Formen $u := b^* U$ für $U \in \mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(D^{(m)})$ in Satz 2.4.7 und aus den Abschätzungen des Lösungsoperators $\widehat{T}_q$ in Satz 6.4.5 folgendermaßen berechnet:

Für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ gibt es nach Bemerkung 6.1.2 (b) eine nur von k abhängige Konstante $\widetilde{C}_k > 0$, so daß mit $\gamma = \gamma(k,m,q)$ die Abschätzung

$$\|B^* f\|_{\mathcal{B}^\gamma(D^{(m)})} \leq \widetilde{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

gilt. Die Form $\widehat{T}_q(B^* f)$ genügt für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ (mit $k < k_0(m,q)$) den Abschätzungen in Satz 6.4.5, die wie folgt notiert werden können:[23]

Es gibt eine Konstante $C > 0$ und eine nur von $\gamma = \gamma(k,m,q)$ abhängige Konstante $C_\gamma > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ und alle $z \in D^{(m)}$ mit $\gamma = \gamma(k,m,q)$ die Abschätzung

$$|\widehat{T}_q B^* f(z)| \leq C\, C_\gamma \, \widetilde{C}_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \, (|\ln(\delta(z))| + 1)^{\widetilde{\gamma}_1(\gamma)} \, \delta(z)^{\widetilde{\gamma}_2(\gamma)} \tag{16}$$

gilt mit von $\gamma = \gamma(k,m,q)$ abhängigen reellen Koeffizienten $\widetilde{\gamma}_1(\gamma) \in \{0,1,2\}$ und $\widetilde{\gamma}_2(\gamma) \leq \min\{0, 1-\gamma\}$.

Aus $\delta(z) \gtrsim |1 + z_n^{m_n}|$ für $z \in D^{(m)}$ und $|1 + (b_n(\zeta))^{m_n}| \approx |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1}$ für $\zeta \in S^{(m)}$ (vgl. Satz 2.3.3 und Kommentar (c) auf Seite 29) folgt $\delta(b(\zeta)) \gtrsim |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1}$. Es gilt also mit $\gamma = \gamma(k,m,q)$ (mit den gleichen Voraussetzungen wie bei (16)) für alle $\zeta \in S^{(m)}$ mit $C_k := C\, C_\gamma \, \widetilde{C}_k$ die folgende Abschätzung:

$$|\widehat{T}_q B^* f(b(\zeta))| \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \Big(|\ln(|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1})| + 1\Big)^{\widetilde{\gamma}_1(\gamma)} \, |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)} \tag{17}$$

Nach Satz 2.4.7 (ii) existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle Formen f in $\mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ auf $S^{(m)}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|b^*(\widehat{T}_q B^* f)(\zeta)| \leq C \, |\widehat{T}_q B^* f(b(\zeta))| \, |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\alpha}(m,q)}$$

[23]Die verschiedenen von γ (und q) abhängigen Konstanten aus Satz 6.4.5 werden ab jetzt zu einer nicht explizit angegebenen Konstante C_γ zusammengefaßt, da die genaue Abhängigkeit der Konstanten von k für diesen Beweis unwichtig ist.

Es gibt also eine Konstante $C > 0$ und eine nur von k abhängige Konstante $C_k > 0$, so daß mit $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m,q)$ und $\gamma = \gamma(k,m,q)$ für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ und alle $\zeta \in S^{(m)}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|b^*\widehat{T}_q B^* f(\zeta)| \leq C\, C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \Big(|\ln(|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-1})| + 1 \Big)^{\widetilde{\gamma}_1(\gamma)} |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}} \tag{18}$$

(mit $\widetilde{\gamma}_1(\gamma) = \widetilde{\gamma}_1(\gamma(k,m,q)) \in \{0,1,2\}$ und $\widetilde{\gamma}_2(\gamma) = \widetilde{\gamma}_2(\gamma(k,m,q)) \leq \min\{0, 1-\gamma\}$) Die Konstanten C_k ergeben sich aus den von k abhängigen Konstanten $\widetilde{C}_k$ und den von γ abhängigen Konstanten in Satz 6.4.5 durch Einsetzen von $\gamma = \gamma(k,m,q)$.

Aus Satz 2.1.3 (i), (iii) und (iv) folgt, daß auf $S^{(m)} \setminus P(0,2)$ gilt:

$$|2i - \zeta_n^{m_n}| \lesssim \|\zeta\|^{m_n} \quad \text{und} \quad |2i - \zeta_n^{m_n}| \gtrsim \|\zeta\|^{\min\{m_n, 2m_1\}}$$

Damit folgt aus (18), daß es eine von k abhängige Konstante $C_k > 0$ gibt, so für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ und alle $\zeta \in S^{(m)} \setminus P(0,2)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |b^*\widehat{T}_q B^* f(\zeta)| \quad &\leq \quad C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \Big(|\ln(\|\zeta\|^{-1})| + 1 \Big)^{\widetilde{\gamma}_1(\gamma)} \\ &\quad \begin{cases} \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) \min\{m_n, 2m_1\}} & \text{für} \quad (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) \leq 0 \\ \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) m_n} & \text{für} \quad (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

gilt, wobei $\gamma = \gamma(k,m,q)$ und $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(m,q)$ ist.

Nun wird berechnet, welche Abschätzungen sich für $q \geq 2$ ergeben, wenn statt Satz 2.4.7 (ii) Satz 2.4.7 (i) ausgenutzt wird. Dabei wird zur Vereinfachung der Logarithmus-Term in (16) und (17) weggelassen, denn durch ihn ändert sich nichts. Nach Satz 2.4.7 (i) gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für $q \geq 2$ und für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ und für alle $\mu \in [0,1]$ auf $S^{(m)}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|b^* T_q B^* f(\zeta)| \leq C\, |T_q B^* f(b(\zeta))| \Big(|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\alpha}_1(m,q)} + \|\zeta\|^{\mu} \, |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)} \Big)$$

Mit (17) folgt daraus für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ und $q \geq 2$, daß (mit $\gamma = \gamma(k,m,q)$, $\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_1(m,q)$ und $\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)$) auf $S^{(m)}$ gilt:

$$|b^* T_q B^* f(\zeta)| \leq C\, C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \Big(|2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}_1} + \|\zeta\|^{\mu} \, |2i - \zeta_n^{m_n}|^{-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}_2} \Big)$$

Offenbar kann mit Satz 2.4.7 (i) höchstens für $\widetilde{\alpha}_2(m,q,0) = \widetilde{\alpha}(m,q) < \widetilde{\alpha}_1(m,q)$ eine Verbesserung der Abschätzungen erzielt werden. Diese Bedingung ist nur für $m_n > 2m_{n-q+1}$ erfüllt. Für $m_n > 2m_{n-q+1}$ gilt insbesondere $\min\{m_n, 2m_1\} = 2m_1$. Es wird ab jetzt nur noch der Fall $m_n > 2m_{n-q+1}$ betrachtet. Für $q \geq 2$ und ein Pseudo-Siegelgebiet $S^{(m)}$ mit $m_n > 2m_{n-q+1}$ gibt es eine nur von k abhängige Konstante $C_k > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ (mit $k < k_0(m,q)$) und alle $\mu \in [0,1]$ auf $S^{(m)} \setminus P(0,2)$ (mit $\gamma = \gamma(k,m,q)$) die folgende Abschätzung gilt:

$$
\begin{aligned}
|b^* T_q B^* f(\zeta)| &\leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left\{ \begin{array}{ll} \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1)2m_1} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1) \leq 0 \\ \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1)m_n} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1) \geq 0 \end{array} \right\} \\
&+ C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left\{ \begin{array}{ll} \|\zeta\|^{\mu+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2)2m_1} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2) \leq 0 \\ \|\zeta\|^{\mu+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2)m_n} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2) \geq 0 \end{array} \right\} \\
&=: C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \Big(A_1(\zeta) + A_2(\zeta,\mu) \Big)
\end{aligned}
$$

Nun wird $A_2(\zeta,\mu)$ anders dargestellt, wobei $\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu) = \widetilde{\alpha}(m,q) + \mu/(2m_{n-q+1})$ ausgenutzt wird.

$$
\begin{aligned}
A_2(\zeta,\mu) &= \left\{ \begin{array}{ll} \|\zeta\|^{\mu+\left(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}-\frac{\mu}{2m_{n-q+1}}\right)2m_1} & \text{für } \mu \geq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1} \\ \|\zeta\|^{\mu+\left(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}-\frac{\mu}{2m_{n-q+1}}\right)m_n} & \text{für } \mu \leq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1} \end{array} \right. \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \|\zeta\|^{\left(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}\right)2m_1+\mu\left(1-\frac{m_1}{m_{n-q+1}}\right)} & \text{für } \mu \geq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1} \\ \|\zeta\|^{\left(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}\right)m_n+\mu\left(1-\frac{m_n}{2m_{n-q+1}}\right)} & \text{für } \mu \leq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Um festzustellen, wann für $q \geq 2$ und $m_n > 2m_{n-q+1}$ so eine verbesserte Abschätzung bewiesen werden kann, werden die Exponenten von $A_1(\zeta)$ und $A_2(\zeta,\mu)$ mit den Exponenten aus der Abschätzung (19) verglichen.

Behauptung:
Für $q \geq 2$ und $m_n > 2m_{n-q+1}$ ergibt sich nur für $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) > 0$ eine verbesserte Abschätzung. Mit $\mu_0 = \mu_0(\gamma,m,q) := \min\{1, 2m_{n-q+1}(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha})\}$ gilt dann für $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}) > 0$ auf $S^{(m)} \setminus P(0,2)$ die folgende verbesserte Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
|b^* \widehat{T}_q B^* f(\zeta)| &\leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \|\zeta\|^{\mu_0+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu_0))m_n} \\
&= C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})} \left\{ \begin{array}{ll} \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1}} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1)) < 0 \\ \|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1)m_n} & \text{für } (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1)) \geq 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Beweis der Behauptung:
Um die Behauptung zu beweisen, werden drei Fälle unterschieden.

(i) Sei $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}(m,q)) \leq 0$.

Dann ist $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu)) \leq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}(m,q)) \leq 0$ für alle $\mu \in [0,1]$. Für alle $\mu \in [0,1]$ gilt also

$$(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}(m,q))2m_1 + \mu(1 - \tfrac{m_1}{m_{n-q+1}}) \geq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}(m,q)) \min\{m_n, 2m_1\}.$$

Der Exponent von $\|\zeta\|$ in der Funktion $A_2(\zeta,\mu)$ ist also nicht kleiner als der Exponent in der Abschätzung (19). Also ergibt sich hier keine Verbesserung.

(ii) Seien $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}(m,q))>0$ und $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1))\geq 0$.

Dann ist $\mu\leq 1\leq 2m_{n-q+1}(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}(m,q))$, und wegen $\left(1-\frac{m_n}{2m_{n-q+1}}\right)<0$ wird der Exponent von $\|\zeta\|$ in $A_2(\zeta,\mu)$ für $\mu_0:=1$ am kleinsten. Es gilt:

$$(-\gamma_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}(m,q))m_n\geq 1+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1))m_n=(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))m_n$$

Aus $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1))\geq 0$ folgt also $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))\geq 0$. Daher gilt $A_1(\zeta)=\|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1)m_n}$. Für $\mu_0:=1$ ergibt sich also eine Verbesserung:

$$\begin{aligned}|b^*T_qB^*f(\zeta)| &\leq C_k\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1)m_n}\\ &= C_k\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\|\zeta\|^{1+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1))m_n}\end{aligned}$$

(iii) Seien $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}(m,q))>0$ und $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,1))<0$.

Für $\mu_0:=2m_{n-q+1}(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}(m,q))\in(0,1)$ gilt $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu_0))=0$.

$$\begin{aligned}A_2(\zeta,\mu) &= \begin{cases}\|\zeta\|^{\mu+\frac{(\mu_0-\mu)m_1}{m_{n-q+1}}} & \text{für } \mu\geq\mu_0\\ \|\zeta\|^{\mu+\frac{(\mu_0-\mu)m_n}{2m_{n-q+1}}} & \text{für } \mu\leq\mu_0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\|\zeta\|^{\mu\left(1-\frac{m_1}{m_{n-q+1}}\right)+\frac{\mu_0m_1}{m_{n-q+1}}} & \text{für } \mu\geq\mu_0\\ \|\zeta\|^{\mu\left(1-\frac{m_n}{2m_{n-q+1}}\right)+\frac{\mu_0m_n}{2m_{n-q+1}}} & \text{für } \mu\leq\mu_0\end{cases}\end{aligned}$$

Für $\mu\geq\mu_0$ gilt $1-\frac{m_1}{m_{n-q+1}}\geq 0$. Die Abschätzung wird für $\mu=\mu_0$ am besten. Für $\mu\leq\mu_0$ gilt $1-\frac{m_n}{2m_{n-q+1}}<0$. Die Abschätzung wird für $\mu=\mu_0$ am besten. Für $\mu=\mu_0$ stimmen die Exponenten in beiden Fällen überein.

$$A_2(\zeta,\mu_0)=\|\zeta\|^{\mu_0}=\|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})2m_{n-q+1}}\leq\|\zeta\|^{(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})m_n}$$

Nun muß noch $A_1(\zeta)$ berücksichtigt werden. Für $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))\leq 0$ ist $A_1(\zeta)$ auf $S^{(m)}\backslash P(0,2)$ beschränkt. Dann ist $A_1(\zeta)\leq A_2(\zeta,\mu_0)$ auf $S^{(m)}\backslash P(0,2)$.

Sei also $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))>0$. Die Exponenten werden verglichen.

$$\begin{aligned}(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))m_n &= (\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu_0)-\widetilde{\alpha}_1(m,q))m_n\\ &= 1+\tfrac{(\mu_0-1)m_n}{2m_{n-q+1}}\\ &= \mu_0+(1-\mu_0)\left(1-\frac{m_n}{2m_{n-q+1}}\right)\ <\ \mu_0\end{aligned}$$

Es gilt also mit $\mu_0:=2m_{n-q+1}(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha})$ folgende verbesserte Abschätzung:

$$|b^*T_qB^*f(\zeta)|\leq C_k\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\|\zeta\|^{\mu_0+(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma)-\widetilde{\alpha}_2(m,q,\mu_0))m_n}=C_k\|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}\|\zeta\|^{\mu_0}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun können die Koeffizienten $l(k,m,q)$ mit Hilfe der eben durchgeführten Berechnungen aus den Ergebnissen von Satz 6.4.5 abgelesen werden, wobei allerdings noch folgendes zu berücksichtigen ist:

(1) Es gilt $\widetilde{\gamma}_2(\gamma) \leq \min\{0, 1-\gamma\}$, und nach Definition von $\widetilde{\alpha}_2$ ist $\widetilde{\alpha}_2(m,q,1) \leq q$. Daraus folgt für den Fall $\gamma = \gamma(k,m,q) \geq 2q$, also $g(2q) \leq k < k_0(m,q)$, daß

$$(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}(m,q)) \geq (-\widetilde{\gamma}_2(\gamma) - \widetilde{\alpha}_2(m,q,1)) \geq (\gamma-1) - q \geq q-1 \geq 0$$

gilt. Für $g(2q) \leq k < k_0(m,q)$ ergeben sich also nur noch positive $l(k,m,q)$. Weiter ist für $g(2q) \leq k < k_0(m,q)$ immer $(-\widetilde{\gamma}_2(\gamma(k,m,q)) - \widetilde{\alpha}_2(m,q,1) \geq 0$. Bei der verbesserten Abschätzung gilt also für $g(2q) \leq k < k_0(m,q)$ immer $\mu_0 = 1$.

(2) Die in diesem Beweis berechneten Abschätzungen gelten nur auf $S^{(m)} \setminus P(0,2)$. Es folgt aber aus Abschätzung (18) auf Seite 107, daß auf $S^{(m)} \cap P(0,2)$ mit einer nur von k abhängigen Konstanten $C_k > 0$ gilt:

$$|b^* \widehat{T}_q B^* f(\zeta)| \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Daraus folgt mit dem entsprechenden $l = l(k,m,q)$ die Abschätzung

$$\|b^* \widehat{T}_q B^* f\|_{\mathcal{F}^l(S^{(m)})} \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}.$$

(3) Da Abschätzungen von $|T_q f(\zeta)|$ gegen $\|\zeta\|$ gesucht sind, werden die Logarithmusterme folgendermaßen aus den Abschätzungen eliminiert: Für $x \in (0,1]$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gilt: $|\ln(x)|\, x^\varepsilon \leq 1/(e\varepsilon)$. Diese Abschätzung wird nun für $x = \|\zeta\|^{-1}$ mit $\zeta \in S^{(m)} \setminus P(0,2)$ (und $\|\zeta\| \to \infty$) ausgenutzt. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt dann:

$$\ln(\|\zeta\|^{-1})\, \|\zeta\|^a = \ln(\|\zeta\|^{-1})\, \|\zeta\|^{-(b-a)}\, \|\zeta\|^b \leq \frac{1}{e(b-a)}\, \|\zeta\|^b$$

□

Es wird nun noch eine etwas gröbere Abschätzung der Parameter $l(k,m,q)$ angegeben, die es erlaubt sehr viele Fallunterscheidungen in Satz 7.1.1 zusammenzufassen und daher einen besseren Überblick über die Ergebnisse ermöglicht.

Satz 7.1.2 (Folgerung aus Satz 7.1.1)
Sei $S^{(m)} := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \varrho^{(m)}(\zeta) := \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} + \operatorname{Im}(\zeta_n^{m_n}) - 1 < 0\}$ *mit* $n \geq 2$. *Dann existieren für* $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *und* $k < k_0(m,q) := g(2n,m,q)$ *lineare Operatoren* $T_q : \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial}) \to \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle* $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ *mit* $k < k_0(m,q)$ *gilt* $\overline{\partial} T_q f = f$ *auf* $S^{(m)}$.

(ii) *Es gibt eine nur von* k *abhängige Konstante* $C_k > 0$*, so daß für alle Formen* $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ *mit* $k < k_0(m,q)$ *die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|T_q f\|_{\mathcal{F}^{l(k,m,q)}(S^{(m)})} \leq C_k \, \|f\|_{\mathcal{F}^k(\overline{S^{(m)}})}$$

Dabei ist $l := l(k,m,q)$ *folgendermaßen zu wählen: (Es ist zu beachten, daß die Funktion* $g(x) := g(x,m,q)$ *von* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *und* q *abhängt und daß in den folgenden Abschätzungen immer* $\gamma := \gamma(k,m,q)$ *und* $\widetilde{\alpha} := \widetilde{\alpha}(m,q)$ *ist.)*

(a) *Für* $k < g(2q)$ *gilt:*

$$l \geq \; -\widetilde{\alpha} \, \min\{m_n, 2m_1\} \quad \textit{für} \quad k < g(1)$$

$$l > \begin{cases} (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}) \, \min\{m_n, 2m_1\} & \textit{für} \quad g(1) \leq k \leq g(1+\widetilde{\alpha}) \\ (-1+\gamma-\widetilde{\alpha}) m_n & \textit{für} \quad g(1+\widetilde{\alpha}) \leq k < g(2q) \end{cases}$$

(b) *Für* $g(2q) \leq k < g(2n-1)$ *gilt:*

$$l > \begin{cases} \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q+1)-\widetilde{\alpha}\Big) m_n & \textit{für} \begin{cases} (\, \gamma - [\gamma] > \frac{(M-1)}{(2M-1)} \\ \quad \textit{und } k < g(2n-2) \,) \end{cases} \\ \Big(-1+\gamma+(M-1)([\gamma]-2q)+(2M-1)(\gamma-[\gamma])-\widetilde{\alpha}\Big) m_n & \textit{sonst} \end{cases}$$

(c) *Für (* $q \leq n-1$ *und* $g(2n-1) \leq k < g(2n)$ *) gilt:*

$$l > \Big(\gamma + (M-1)(2n-2q) + (2M-1)(\gamma - [\gamma]) - \widetilde{\alpha}\Big) m_n$$

□

Für das klassische Siegelgebiet $S = S^{(1,\ldots,1)}$ können die expliziten Abschätzungen für $l(k,m,q)$ in Satz 7.1.1 leicht ausgerechnet werden:

Folgerung 7.1.3 (Klassisches Siegelgebiet)
Für das klassische Siegelgebiet S *mit* $m_1 = \ldots = m_{n-1} = m_n = 1$ *gilt Satz 7.1.1 und es ergeben sich folgende Abschätzungen für die Koeffizienten* $l := l(k,m,q)$*:*

(i) *Für (* $q \leq n-1$ *und* $k < \min\{0, n-q-2\}$ *) gilt:*

$$\begin{aligned} l &\geq -q+1 & &\textit{für} \quad k < -q-1/2 \\ l &> q+2-2|k| & &\textit{für} \quad -q-1/2 \leq k < \min\{0, n-q-2\} \end{aligned}$$

(ii) Für ($q = n-1$ und $-1 \leq k < 0$) gilt

$$\begin{array}{lll} l \geq n+3-4|k| = (n-1)+2-2|k|+(2-2|k|) & \textit{für} & k \neq -1,\ -1/2 \\ l > n+3-4|k| & \textit{für} & k = -1,\ -1/2 \end{array}$$

(iii) Für ($q = n$ und $k < -1$) gilt:

$$l > -n+1 \quad \textit{für} \quad k = -n-1/2$$

$$l \geq \begin{cases} -n+1 & \textit{für} \quad k < -n-1/2 \\ n+2-2|k| & \textit{für} \quad -n-1/2 < k < -1 \end{cases}$$

□

Für den Sonderfall des klassischen Siegelgebietes ist gut erkennbar, wie die Abschätzungen für die Koeffizienten $l(k,m,q)$ von k und vom Grad q der betrachteten Formen abhängen. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Abschätzungen der Lösungen auf dem klassischen Siegelgebiet für größeres q schlechter werden. Im allgemeinen kann die genaue Abhängigkeit der Koeffizienten $l(k,m,q)$ von dem Grad q nicht so einfach festgestellt werden. Es besteht aber die Vermutung, daß auch auf beliebigen Pseudo-Siegelgebieten die Abschätzungen der Lösungen schlechter werden, wenn sich der Grad der Formen erhöht.

Bei der Interpretation der Ergebnisse aus Satz 7.1.1 ist allerdings zu beachten, daß keine Informationen über die Güte der Abschätzungen im Satz 7.1.1 vorliegen. Der Satz sagt aus, daß für $f \in \mathcal{F}^k_{(0,q)}(\overline{S^{(m)}}) \cap ker(\overline{\partial})$ mit $k < k_0(m,q)$ eine Lösung $u \in \mathcal{F}^{l(k,m,q)}_{(0,q-1)}(S^{(m)})$ der Gleichung $\overline{\partial}u = f$ existiert, also eine Lösung, die für $\|\zeta\| \to \infty$ höchstens wie $\|\zeta\|^{l(k,m,q)}$ wächst. Es ist aber nicht auszuschließen, daß diese Lösung ein besseres Wachstumsverhaltenverhalten für $\|\zeta\| \to \infty$ besitzt, als es durch die Abschätzungen in Satz 7.1.1 angegeben wird.

A Eigenschaften der Pseudo-Siegelgebiete

Beweis der Levi-Pseudokonvexität der Pseudo-Siegelgebiete

Es werden die Leviform $\mathrm{L}_\zeta(\varrho^{(m)}, t)$ der Randfunktion $\varrho^{(m)}$ und der holomorphe Tangentialraum $\mathrm{T}_\zeta^{\mathbb{C}}(bS^{(m)})$ an $bS^{(m)}$ in $\zeta \in bS^{(m)}$ berechnet.

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\zeta(\varrho^{(m)}, t) &= \sum_{j=1}^{n-1} (m_j)^2 |\zeta_j|^{2m_j-2} |t_j|^2 \geq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{C}^n \\
\mathrm{T}_\zeta^{\mathbb{C}}(bS^{(m)}) &= \left\{ t \in \mathbb{C}^n : \partial\varrho^{(m)}(\zeta)(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial \zeta_j} t_j = 0 \right\} \\
&= \left\{ t \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n-1} m_j \overline{\zeta}_j |\zeta_j|^{2m_j-2} t_j + \frac{1}{2i} m_n \zeta_n^{m_n-1} t_n = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Gibt es ein $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $m_{j_0} \neq 1$, dann existiert ein Randpunkt ζ von $S^{(m)}$ und ein $\widetilde{t} \in \mathrm{T}_\zeta^{\mathbb{C}}(bS^{(m)}) \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{L}_\zeta(\varrho^{(m)}, \widetilde{t}) = 0$.[24] Also ist $S^{(m)}$ Levi-pseudokonvex, aber für $m \neq (1, \ldots, 1)$ nicht streng Levi-pseudokonvex. □

Beweis der Pseudokonvexität der Pseudo-Siegelgebiete

Die Pseudokonvexität von $S^{(m)}$ wird durch Angabe einer streng plurisubharmonischen Ausschöpfungsfunktion gezeigt. Sei

$$\varphi^{(m)}(\zeta) := -\ln(-\varrho^{(m)}(\zeta)) + \|\zeta\|^2.$$

Die Funktion $\varphi^{(m)}$ ist glatt auf $S^{(m)}$ und auch streng plurisubharmonisch. Die Leviform lautet nämlich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_\zeta(\varphi^{(m)}, t) &= \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{(-1)}{\varrho^{(m)}(\zeta)} \frac{\partial \varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_l} \right) t_j \overline{t}_l + \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} \frac{1}{(\varrho^{(m)}(\zeta))^2} \frac{\partial \varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}_l} t_j \overline{t}_l \\
&\quad + \sum_{j,l=1}^{n} \frac{1}{(-\varrho^{(m)}(\zeta))} \frac{\partial^2 \varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_l} t_j \overline{t}_l + \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2
\end{aligned}$$

[24] Z. B. sei ζ ein Randpunkt mit $\zeta_{j_0} = 0$. Dann kommt t_{j_0} in $\partial\varrho^{(m)}(\zeta_{j_0})(t)$ und $\mathrm{L}_{\zeta_{j_0}}(\varrho^{(m)}, t)$ nicht mehr vor, und für $\widetilde{t} = (0, \ldots, 0, t_{j_0}, 0, \ldots, 0)$ mit $t_{j_0} \neq 0$ sind sowohl $\mathrm{L}_\zeta(\varrho^{(m)}, \widetilde{t}) = 0$, als auch $\widetilde{t} \in \mathrm{T}_\zeta^{\mathbb{C}}(bS^{(m)}) \setminus \{0\}$ erfüllt.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\varrho^{(m)}(\zeta))^2}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varrho^{(m)}(\zeta)}{\partial\zeta_j}\,t_j\right|^2 + \frac{1}{(-\varrho^{(m)}(\zeta))}\,\mathrm{L}_\zeta(\varrho^{(m)},t) + \sum_{j=1}^{n}|t_j|^2 \\
&> 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $D_c := \{\zeta \in S^{(m)} : \varphi^{(m)}(\zeta) < c\}$. Zu beweisen ist, daß D_c relativ kompakt in $S^{(m)}$ liegt. Das ist genau dann der Fall, wenn D_c beschränkt ist und sein Abschluß in $S^{(m)}$ liegt.

Es strebe $\zeta \in S^{(m)}$ gegen den Rand von $S^{(m)}$. Dann strebt $-\ln(-\varrho^{(m)}(\zeta))$ gegen Unendlich, also gilt $\overline{D_c} \subset S^{(m)}$.

Um zu zeigen, daß D_c beschränkt ist, wird ohne Einschränkung $\|\zeta\| \geq 1$ betrachtet.

$$
\begin{aligned}
c &> -\ln(-\varrho^{(m)}(\zeta)) + \|\zeta\|^2 \\
&= -\ln\left(1 - \mathrm{Im}(\zeta_n^{m_n}) - \sum_{j=1}^{n-1}|\zeta_j|^{2m_j}\right) + \|\zeta\|^2 \\
&\geq -\ln(2\|\zeta\|^{m_n}) + \|\zeta\|^2 \\
&= -\ln(2) - m_n\ln(\|\zeta\|) + \|\zeta\|^2 \ \to \infty \quad \text{für} \quad \|\zeta\| \to \infty
\end{aligned}
$$

D_c ist also auch beschränkt. Somit ist $\varphi^{(m)}$ eine glatte, streng plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion. Das Gebiet $S^{(m)}$ ist schwach pseudokonvex. □

Beweis der strengen Levi-Pseudokonvexität des klassischen Siegelgebietes

Für das klassische Siegelgebiet $S := S^{(1,\ldots,1)}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\mathbb{C}}_\zeta(bS) &= \left\{ t \in \mathbb{C}^n : \partial\varrho(\zeta)(t) = \sum_{j=1}^{n-1}\overline{\zeta}_j t_j + \frac{1}{2i}\,t_n = 0 \right\} \\
\mathrm{L}_\zeta(\varrho,t) &= \sum_{j=1}^{n-1}|t_j|^2 \ \geq \ 0.
\end{aligned}
$$

Die Leviform verschwindet nur für $t \in \mathbb{C}^n$mit $t_j = 0$ für alle $j = 1,\ldots,n-1$. Ein solches t erfüllt aber $\partial\varrho(\zeta)(t) = \frac{1}{2i}\,t_n = 0$ nur, wenn $t = (0,\ldots,0)$ ist. Also ist die Leviform für alle $\zeta \in bS$ auf dem gesamten holomorphen Tangentialraum $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}_\zeta(bS) \setminus \{0\}$ positiv definit. Das klassische Siegelgebiet S ist also streng Levi-pseudokonvex. □

B Zur Geometrie der Pseudo-Siegelgebiete

In diesem Anhang wird eine geometrische Anschauung von der Gestalt der Pseudo-Siegelgebiete $S^{(m)}$ gegeben, d. h. es wird untersucht, in welche Richtungen die Gebiete $S^{(m)}$ unbeschränkt sind. Es werden die Abschlüsse der Pseudo-Siegelgebiete betrachtet.

Der Abschluß des Pseudo-Siegelgebietes $\overline{S^{(m)}}$ ist durch die Bedingung $\varrho^{(m)}(\zeta) \le 0$ bestimmt. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j} \le 1 - \mathrm{Im}\,(\zeta_n^{m_n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(\zeta_n^{m_n}) \le 1 - \sum_{j=1}^{n-1} |\zeta_j|^{2m_j}.$$

Offenbar ist das Wachstum der ersten $(n-1)$ Koordinaten beschränkt durch das Wachstum von $\mathrm{Im}\,(\zeta_n^{m_n})$ ins Negative. Aus $\|\zeta\| \to \infty$ folgt also $|\zeta_n| \to \infty$, was auch aus der Abschätzung (ii) in Hilfssatz 2.1.3 hervorgeht. Daher genügt es, die n-te Koordinate zu untersuchen. Werden Polarkoordinaten $\zeta_n = re^{i\phi}$ für ζ_n gewählt, so folgt aus den obigen Ungleichungen:

$$\mathrm{Im}\,(\zeta_n^{m_n}) = \mathrm{Im}(r^{m_n}e^{im_n\phi}) = r^{m_n}\sin(m_n\phi) \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(m_n\phi) \le 1/(r^{m_n})$$

Wird der Winkel ϕ eindeutig dargestellt als $\phi = (\psi + 2\lambda\pi)/m_n$ mit $\psi \in [-\pi, \pi)$ und $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$ so gilt

$$\sin(m_n\phi) = \sin(\psi) \le 1/(r^{m_n}).$$

Im Grenzübergang $|\zeta_n| = r \to \infty$ gilt also $\psi \in [-\pi, 0]$, d. h. für $\zeta \in \overline{S^{(m)}}$ kann ζ_n nur in die Richtungen gegen Unendlich streben, die durch folgende Vektoren in der n-ten Koordinatenebene gegeben sind:[25]

$$\left\{ e^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n} : \psi \in [-\pi, 0], \lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\} \right\}$$

Es handelt sich dabei also um m_n Keissegmente mit dem Winkel (π/m_n).

In dem zweiten Kapitel wird in Satz 2.1.5 bewiesen, daß der Biholomorphismus $b\,\big|_{\overline{S^{(m)}}} = b_{(m)}\,\big|_{\overline{S^{(m)}}} : \overline{S^{(m)}} \to \overline{D^{(m)}} \setminus \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}})$ die Eigenschaft

$$\lim_{\zeta \in \overline{S^{(m)}},\, \|\zeta\| \to \infty} b(\zeta) \in \mathrm{Sing}(\overline{D^{(m)}}) = \left\{ z^{(\lambda)} = e^{i\pi(1+2\lambda)/m_n} : \lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\} \right\}$$

besitzt. Es wird nun noch berechnet, gegen welchen Punkt $z^{(\lambda_0)} = e^{i\pi(1+2\lambda_0)/m_n}$ (mit $\lambda_0 \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$) $b(\zeta)$ strebt, wenn ζ_n in Richtung von $e^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n}$

[25] D. h. ζ_n kann längs des Strahls $\rho e^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n}$ mit $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ (und $\psi \in [-\pi, 0]$, $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$) gegen Unendlich streben.

mit $\psi \in [-\pi, 0]$ und $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$ gegen Unendlich strebt. Sei also $\zeta_n := re^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n}$ mit festem $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$, festem $\psi \in [-\pi, 0]$ und variablem $r > 0$, $r \to \infty$.

$$b_n(\zeta) = \left(\frac{1}{2i - \zeta_n^{m_n}}\right)^{1/m_n} \zeta_n = \left(\frac{-2i - \overline{\zeta}_n^{m_n}}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^2}\right)^{1/m_n} \zeta_n$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \in \overline{S^{(m)}},\, \|\zeta\| \to \infty} b_n(\zeta) &= \lim_{|\zeta_n| \to \infty} \frac{\zeta_n}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^{1/m_n}} \frac{(-(2i + \overline{\zeta}_n^{m_n}))^{1/m_n}}{|2i - \zeta_n^{m_n}|^{1/m_n}} \\
&= e^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n}\, e^{-i(\pi+\psi)/m_n} \\
&= e^{i(-\pi+2\pi\lambda)/m_n} = \begin{cases} z^{(\lambda-1)} & \text{für } \lambda > 0 \\ z^{(m_n-1)} & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Wenn ζ_n in irgendeiner Richtung aus dem Kreissektor $\left\{e^{i(\psi+2\pi\lambda)/m_n} : \psi \in [-\pi, 0]\right\}$ (für festes $\lambda \in \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$) gegen Unendlich strebt, so strebt $b(\zeta)$ also immer gegen $z^{(\lambda-1)}$ für $\lambda > 0$, bzw. $z^{(m_n-1)}$ falls $\lambda = 0$ ist.

Literatur

[BaPa] E. Barletta, C. Parrini: *Bounded Solutions for $\overline{\partial}$-Problem in Pseudo-Siegel Domains.* Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXVIII (1995), 119 - 132

[Bu] R. Buchholz: *Lösungsoperatoren für das $\overline{\partial}$-Problem für eine Klasse von verzweigten Überlagerungen von streng pseudokonvexen Gebieten mit $\mathcal{C}^k$- und $\mathcal{L}^p$-Abschätzungen für $q = n - 1$.* Diplomarbeit an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (1987)

[ChKrMa] Z. Chen, S. G. Krantz, D. Ma: *Optimal $\mathcal{L}^p$ Estimates for the $\overline{\partial}$-Equation on Complex Ellipsoids in $\mathbb{C}^n$.* manuscripta math. 80 (1993), 131 - 149

[DaHe] Š. A. Dautov, G. M. Henkin: *Zeros of Holomorphic Functions of Finite Order and Weighted Estimates for Solutions of the $\overline{\partial}$-Equation.* Math. USSR Sbornik, Vol. 35 (1979), No. 4, 449 - 459

[DiFoWi] K. Diederich, J. E. Fornaess, J. Wiegerinck: *Sharp Hölder Estimates for $\overline{\partial}$ on Ellipsoids.* manuscripta math. 56 (1986), 399 - 417,

[Fi] B. Fischer: *Gleichmäßig gewichtete Abschätzungen für die Cauchy-Riemann-Gleichung.* Dissertation an der Humboldt-Universität zu Berlin (1992)

[GuRo] R. C. Gunning, H. Rossi: *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice Hall, Inc., 1965

[He] T. Hefer: *Optimale Regularitätssätze für die $\overline{\partial}$-Gleichung auf gewissen konkaven und konvexen Modellgebieten.* Bonner Mathematische Schriften Nr.301 (1997)

[LiRa] I. Lieb, R. M. Range: *Lösungsoperatoren für den Cauchy-Riemann-Komplex mit $\mathcal{C}^k$-Abschätzungen.* Math. Ann. 253 (1980), S. 145 - 164

[Py] I. I. Pyatetskii-Shapiro: *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains.* Gordon and Breach Science Publishers, 1969

[Ra1] R. M. Range: *On Hölder Estimates for $\overline{\partial}u = f$ on Weakly Pseudoconvex Domains.* Proc. Int. Conf. Cortona 1967 - 1977. Scuola Norm. Sup. Pisa (1978), 247 - 267

[Ra2] R. M. Range: *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1986

[We] M. Wette: *$\mathcal{C}^k$-Abschätzungen für den Cauchy-Riemann Komplex auf gewissen schwach konvexen Gebieten*. Diplomarbeit an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (1985)